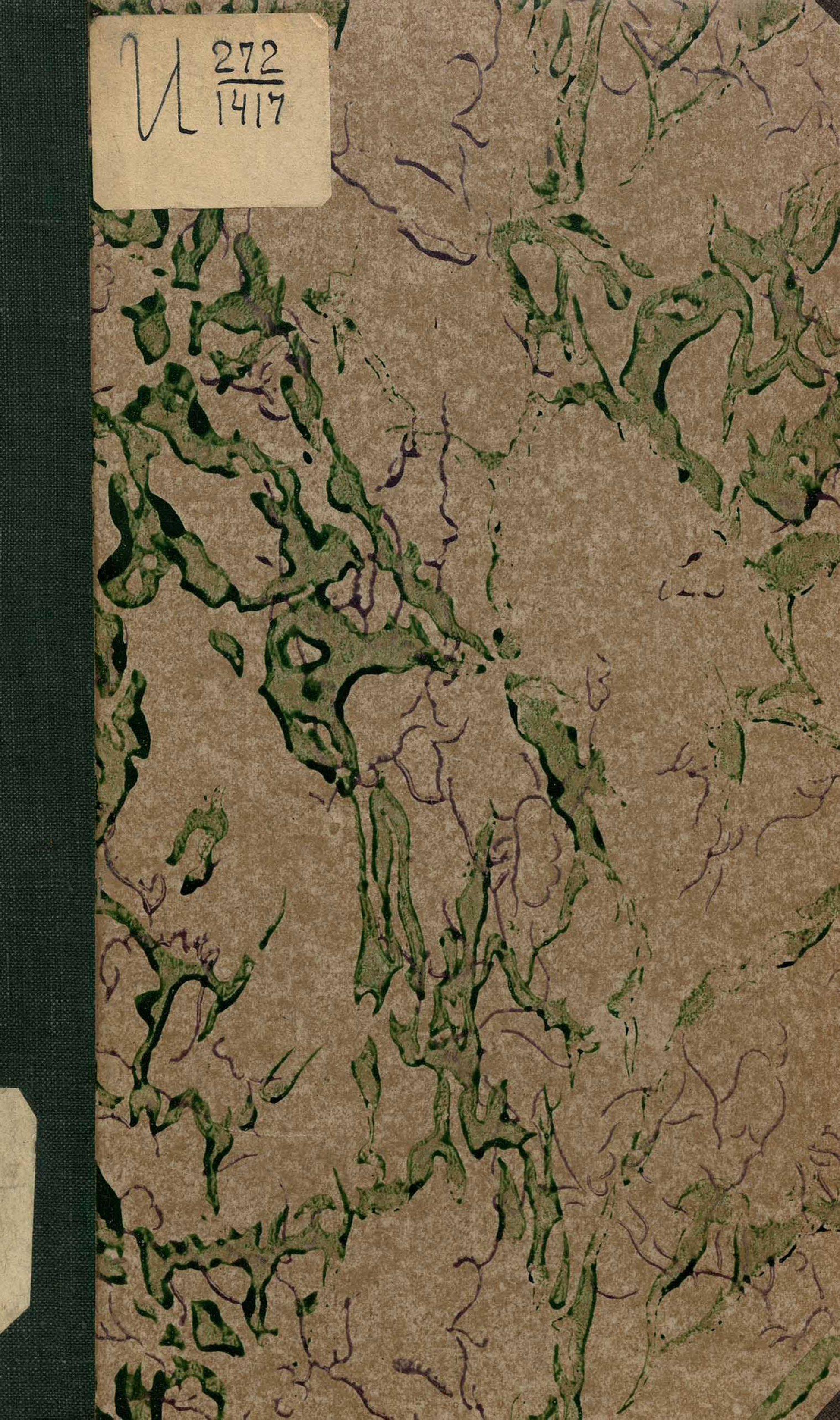
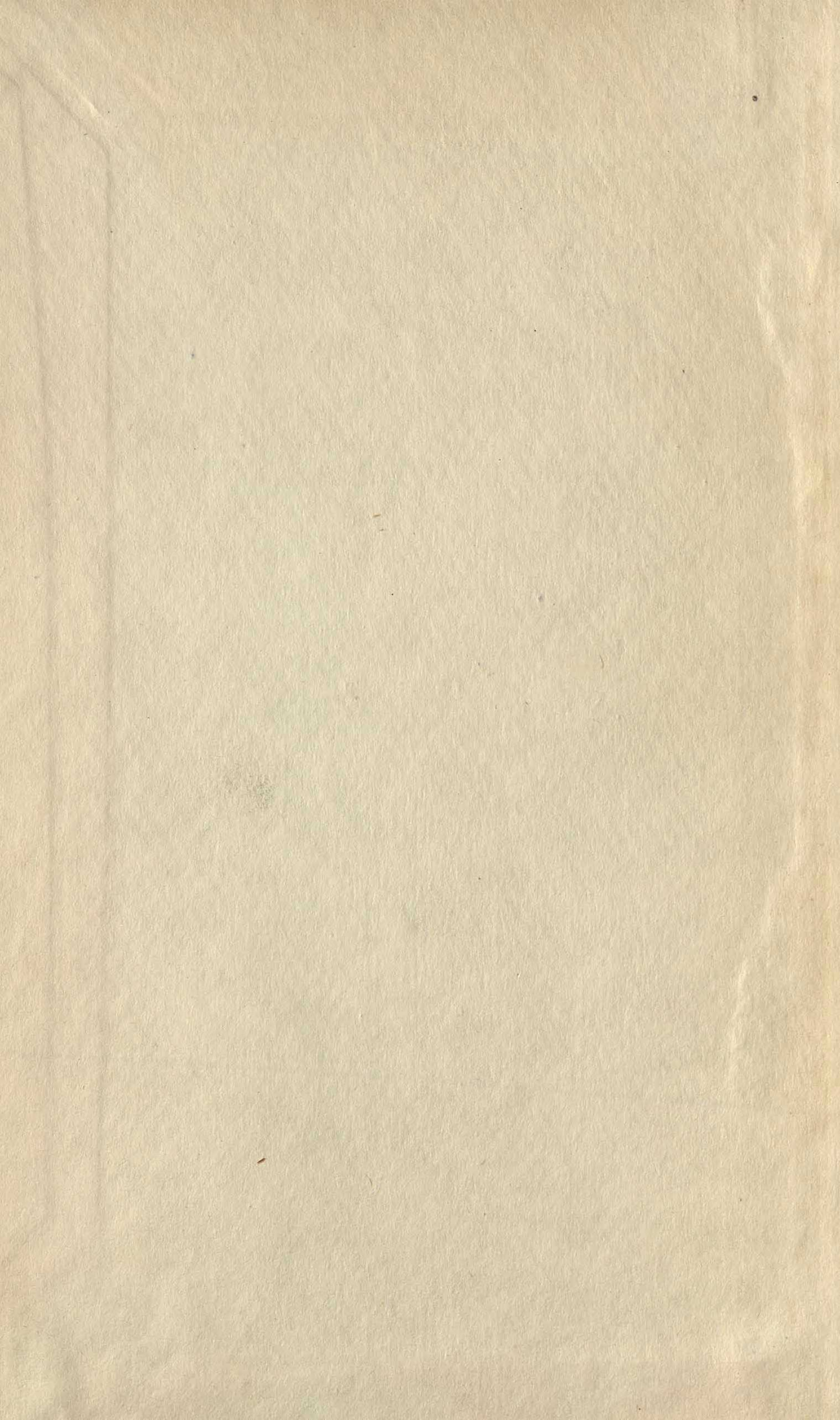
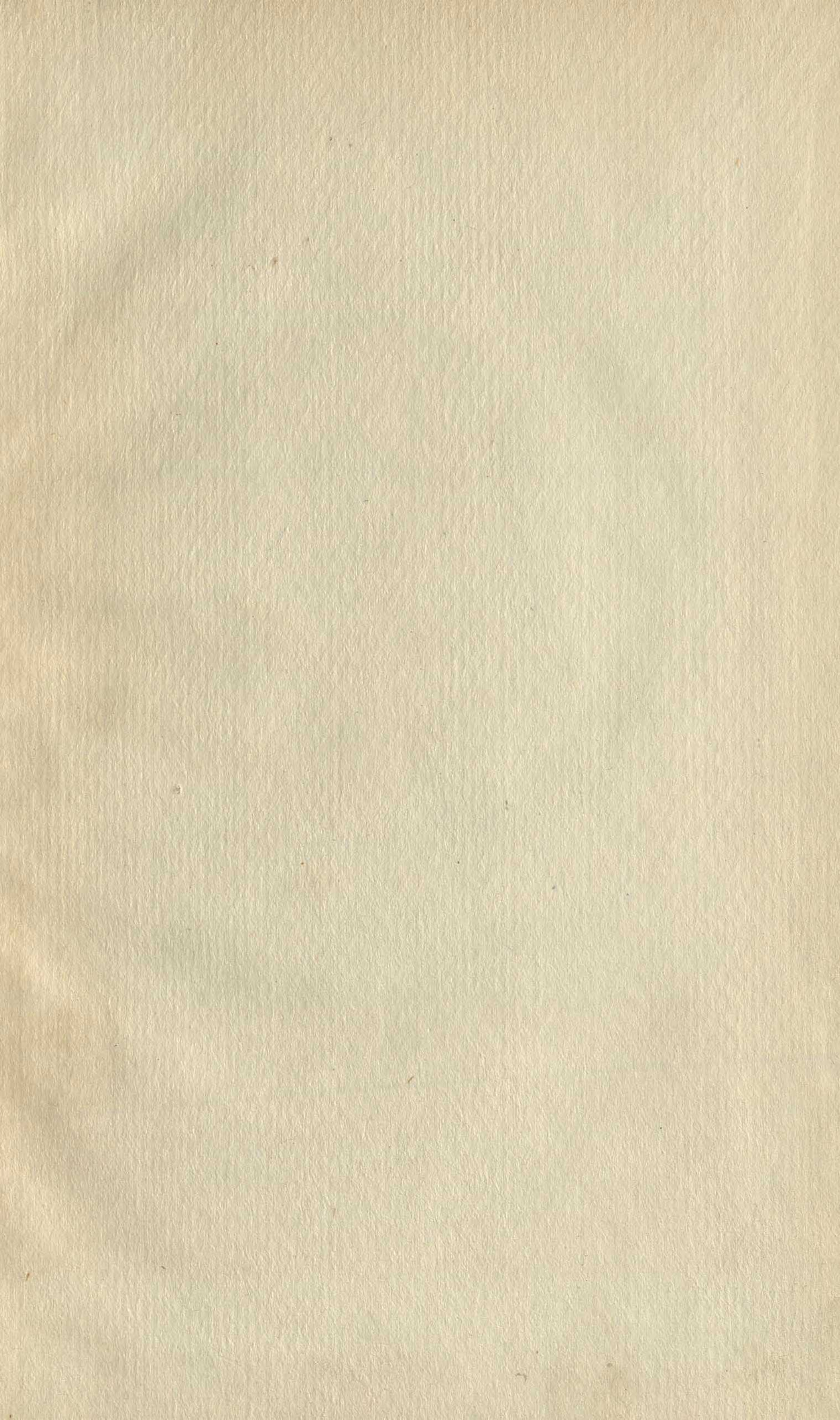


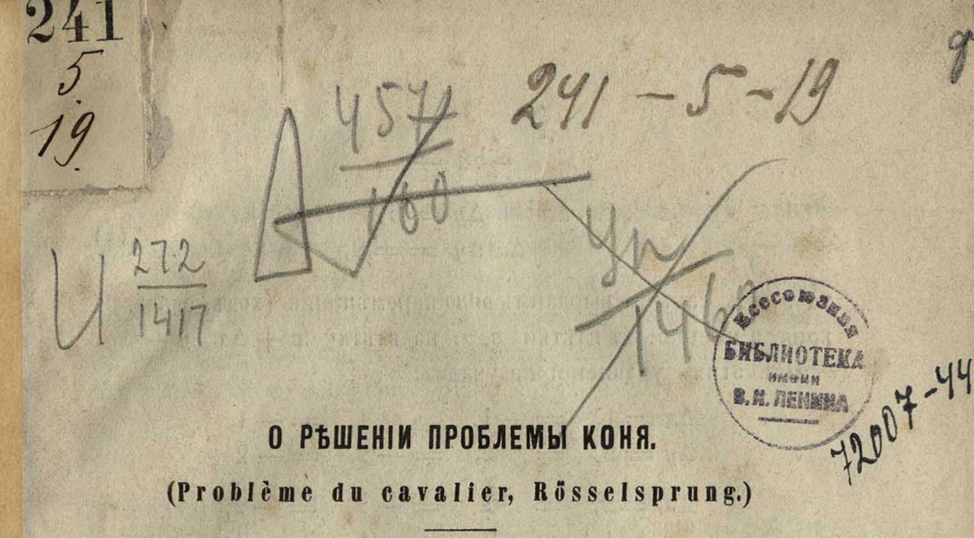






КНИГА ИМЕЕТ:

Печатн. листов	Выпуск	В перепл. един соедин. №№ вып.	Таблиц	Карт	Иллюстр.	Служебн. №№	№№ списка и порядковый	1947 г.
3						Ди	126/4622	



О РѢШЕНІИ ПРОБЛЕМЫ КОНЯ.

(Problême du cavalier, Rösselsprung.)

Кн. С. С. Урусова.

(Читано 16-го октября 1865 г.)

1. Въ настоящей статьѣ *) особенное вниманіе обращено на изысканіе способовъ опредѣлять число *обходовъ* 64-хъ клѣточной доски, которые можно совершить *ходомъ* шашки, называемой *конемъ*. Способы найдены, и притомъ столь общіе, что только малый шагъ остается сдѣлать для того, чтобы довести вычисленіе до конца, приложивъ его къ какой ни есть шашечницѣ въ p^2 клѣтокъ.

Не лишнимъ считаю напомнить читателю, что въ приложеніяхъ математики къ шахматнымъ задачамъ подъ словомъ *клѣтка* разумѣютъ почти всегда *центръ* клѣтки, и что при исчисленіи координатъ (почти всегда прямоугольныхъ) клѣтокъ, за единицу принимается разстояніе между центрами двухъ смежныхъ клѣтокъ, находящихся на одномъ и томъ же *полѣ*—вертикальномъ или горизонтальномъ.

2. *Опредѣленіе хода коня.* Если координатамъ какой ни есть клѣтки шашечницы дадимъ приращенія Δx, Δy (x—абсцисса, y—ордината) и этимъ приращеніямъ припишемъ такія значенія, которыя удовлетворили бы совокупнымъ уравненіямъ:

---

*) Матеріалъ для этой статьи заимствованъ мною изъ извѣстнаго сочиненія К. А. Яниша: «Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs».

$$\begin{aligned} \Delta x^2 + \Delta y^2 &= 5 \\ \Delta x \, \Delta y &= \pm 2, \end{aligned} \qquad (1)$$

то этимъ самымъ выразимъ *одно* перемѣщеніе (ходъ, скачекъ) коня, а именно: съ клѣтки x, y, на клѣтку $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

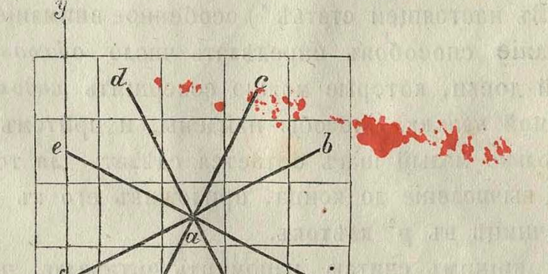
Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1, \quad = -1, \quad = 1, \quad = -1 \\ \Delta y &= 2, \quad = 2, \quad = -2, \quad = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= 2, \quad = 2, \quad = -2, \quad = -2; \\ \Delta y &= 1, \quad = -1, \quad = 1, \quad = -1; \end{aligned}$$

всего 8 значеній, называемыхъ ***звеньями***, графическое изображеніе которыхъ показано на чертежѣ 1; именно:

Черт. 1.



звено ab изображаетъ $\begin{matrix}\Delta x = 2 \\ \Delta y = 1\end{matrix}$; звено ac — $\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta y = 2\end{matrix}$;

» ae » $\begin{matrix}\Delta x = -2 \\ \Delta y = 1\end{matrix}$; » ad » $\begin{matrix}\Delta x = -1 \\ \Delta y = 2\end{matrix}$;

» af » $\begin{matrix}\Delta x = -2 \\ \Delta y = -1\end{matrix}$; » ag » $\begin{matrix}\Delta x = -1 \\ \Delta y = -2\end{matrix}$;

» ai » $\begin{matrix}\Delta x = 2 \\ \Delta y = -1\end{matrix}$. » ah » $\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta y = -2\end{matrix}$;

3. *Уравненія движенія коня на неопредѣленной шашечницѣ.*

Движенiе коня, то есть совокупность нѣсколькихъ послѣдовательныхъ ходовъ этой шашки, можно изобразить различными формулами, лишь бы p, то есть число клѣтокъ заключающихся въ бокѣ шашечницы, оставалось неопредѣленнымъ. Пусть $x_0 . y_0$ означаютъ координаты начальной, а x_n, y_n — конечной точки движенiя;

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1, \ldots \Delta x_{n-1}$$
$$\Delta y_0,\ \Delta y_1, \ldots \Delta y_{n-1}$$

соотвѣтствующiя координатамъ

$$x_0,\ x_1, \ldots x_{n-1}$$
$$y_0,\ y_1, \ldots y_{n-1}$$

первыя разности: тогда условныя уравненiя движенiя будутъ:

$$\begin{aligned} x_0 + \Delta x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_{n-1} &= x_n \\ y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1} &= y_n. \end{aligned} \tag{2}$$

На основанiи сказаннаго въ предыдущемъ нумерѣ, этимъ первымъ разностямъ можно приписывать только 8 значенiй, опредѣляемыхъ уравненiями (1); а потому, предположивъ что $\begin{matrix}\Delta x=1\\ \Delta y=2\end{matrix}$ заключается въ (2) нѣкоторое число a разъ, $\begin{matrix}\Delta x= & 1\\ \Delta y= & -2\end{matrix}$ — b разъ, $\begin{matrix}\Delta x = & -1\\ \Delta y = & 2\end{matrix}$ — c разъ и т. д. до $\begin{matrix}\Delta x = 2\\ \Delta y = 1\end{matrix}$, которое повторено въ (2) h разъ, можно будетъ написать вмѣсто (2) слѣдующiя 3 уравненiя:

$$\begin{aligned} a + b - c - d + 2(e + f - g - h) &= x_n - x_0 \\ 2(a - b + c - d) + e - f + g - h &= y_n - y_0 \\ a + b + c + d + e + f + g + h &= n. \end{aligned} \tag{3}$$

Или, приравнявъ $a + b = A$, $a + c = A'$, $c + d = B$, $b + d = B'$, $e + f = C$, $e + g = C'$, $d + h = D$, $f + h = D'$, получимъ:

$$\begin{aligned} A - B + 2(C - D) &= x_n - x_0 \\ 2(A' - B') + C' - D' &= y_n - y_0 \\ A + B + C + D &= A' + B' + C' + D' = n \\ A + B = A' + B', \quad C + D &= C' + D'; \end{aligned} \tag{4}$$

это и есть простѣйшій видъ условій для перехода отъ одной клѣтки къ другой ходомъ коня, когда p остается неопредѣленнымъ.

4. *Какъ могли бы опредѣлиться всѣ обходы 64-хъ клѣточной, какъ и всякой другой шашечницы, съ помощью условій (4).*

Для того чтобы движеніе коня производилось въ предѣлахъ данной шашечницы и при томъ безъ возвращенія на однажды тронутую клѣтку, найденныхъ трехъ условій (4) далеко недостаточно; тѣмъ не менѣе, съ точки зрѣнія теоретической, есть возможность исчерпать всѣ *рѣшенія* (*обходы* всѣхъ клѣтокъ въ p^2 или p^2-1 ходовъ, или *цѣпи* въ p^2 или p^2-1 звеньевъ), не прибѣгая ни къ какимъ новымъ уравненіямъ. Покажемъ этотъ способъ для шашечницы $p=8$.

Полагаемъ $n=64$, $x_n=x_0$, $y_n=y_0$; такъ что клѣтка начала цѣпи есть вмѣстѣ и клѣтка конца цѣпи: тогда вмѣсто (4) получится:

$$A-B+2(C-D)=0$$
$$2(A'-B')+C'-D'=0$$
$$A+B+C+D=A'+B'+C'+D'=64;$$

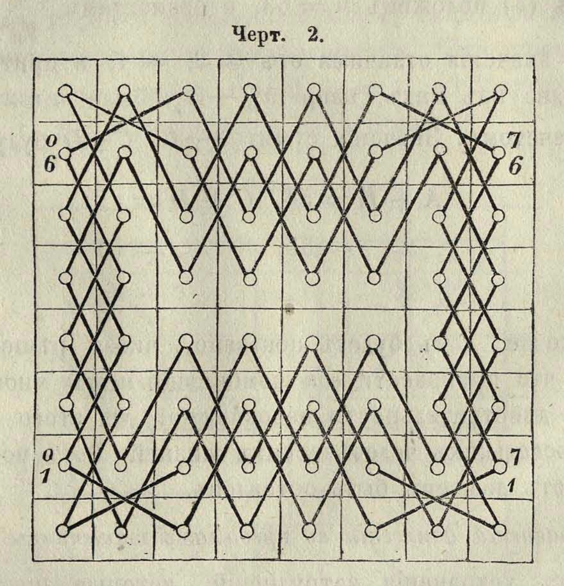
и эти уравненія выразятъ нѣкоторую *смыкающуюся цѣпь*, состоящую изъ 64 звеньевъ, впрочемъ не на данной шашечницѣ, а на неопредѣленной. Но такъ какъ особенность этого рода цѣпей состоитъ въ томъ, что суммы $A+B$, $C+D$ должны быть числами четными: то мы и воспользуемся этимъ обстоятельствомъ для того, чтобы весьма простымъ построеніемъ опредѣлить при какомъ наибольшемъ значеніи суммы $A+B$, и, слѣдовательно, наименьшемъ суммы $C+D$, непрерывная цѣпь въ 64 звена можетъ состояться.

Построеніе производимъ на томъ основаніи, что въ каждой клѣткѣ должны сходиться только по два звена.

Начертимъ прежде всего тѣ звенья, которыя примыкаютъ къ четыремъ угламъ шашечницы: тотчасъ видимъ, что $A+B<60$ и $C+D>4$. Проведемъ потомъ тѣ восемь звеньевъ, которыя примыкаютъ къ клѣткамъ $\begin{matrix} x=0 & =0 \\ y=1, & =6, \end{matrix}$

$= 7 \quad = 7$
$= 1' \quad = 6$: опять видимъ, что изъ восьми звеньевъ, которыя надо начертить, 4 должны принадлежать $A + B$, и столько же $C + D$; а потому $A + B$ не > 56, $C + D$ не < 8. Если же построимъ остальныя 48 звеньевъ такъ, чтобы ордината прибывала или убывала на 2, то получимъ, какъ показываетъ чертежъ 2, не одну сомкнутую цѣпь, а 4 многоугольника, въ 16 сторонъ каждый.

Черт. 2.



Этимъ построеніемъ убѣждаемся, что значенія сказанныхъ суммъ, при которыхъ непрерывная цѣпь можетъ состояться, суть слѣдующія:

$$\begin{aligned} A + B &= 54, & C + D &= 10, \\ &= 52, & &= 12, \\ &\;\cdot & &\;\cdot \\ &\;\cdot & &\;\cdot \\ &\;\cdot & &\;\cdot \\ &= 32, & &= 32. \end{aligned}$$

Можно получить еще 11 значеній посредствомъ измѣненія y въ x, x въ y: тогда между значеніями суммъ $A+B$, $C+D$ произойдетъ перестановленіе.

Теперь для полученія всѣхъ обходовъ необходимо и достаточно произвести всѣ возможныя комбинаціи между четырьмя начерченными многоугольниками, вводя послѣдовательно по два новыхъ звена. Несмыкающіяся же цѣпи получатся тогда, когда въ (4) положимъ $n = 63$, и разностямъ $\begin{matrix} x_n - x_0 \\ y_n - y_0 \end{matrix}$ припишемъ значенія отличныя отъ ± 2, ± 1, и притомъ такія, чтобы одна изъ нихъ, напр. $x_n - x_0$, была четомъ, а другая — нечетомъ. Значенія суммъ $A+B$, $C+D$ будутъ тогда:

$$\begin{aligned} A + B &= 54, & C + D &= 9 \\ &= 53, & &= 10 \\ & \cdots & & \cdots \end{aligned}$$

Однако же, какъ будетъ показано, число рѣшеній столь велико, что произвести *всѣ* комбинаціи между многоугольниками въ дѣйствительности невозможно; для этого недостало бы и нѣсколькихъ человѣческихъ жизней. Вотъ почему способъ этотъ долженъ быть оставленъ.

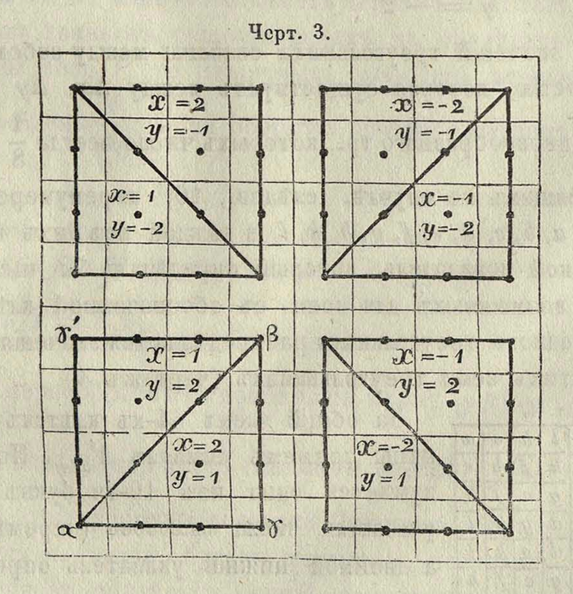
5. *Уравненія движенія въ предѣлахъ шашечницы* $p^2 = 64$.

Успѣхъ устраненія затрудненій, которыя представляетъ проблема коня, зависитъ преимущественно отъ того, какой способъ означенія будетъ принятъ для отличія одной клѣтки отъ другой. Обыкновенныя координаты рѣшительно недостигаютъ требуемой цѣли; ибо онѣ опредѣляютъ положеніе точки только относительно двухъ безконечныхъ линій: *позиція* клѣтки относительно данной шашечницы, и отношеніе клѣтки къ данной шашкѣ остаются невыразимыми. Математики показали, что при обыкновенныхъ координатахъ вопросъ о не оставленіи шашкою предѣловъ доски приводится либо къ неравенствамъ, либо къ суммованію необычайнаго количества урав-

ненiй. При нашей же системѣ означенiя клѣтокъ сказанныя затрудненiя вполнѣ устраняются Вотъ въ чемъ она состоитъ.

Раздѣлимъ шашечницу на восемь симметричныхъ треугольниковъ (чертежъ 3), и одинъ изъ нихъ, напримѣръ $\alpha\beta\gamma$, возьмемъ за *модель*, или *координату*; то есть позицiю каждаго изъ остальныхъ треугольниковъ будемъ опредѣлять по отношенiю его къ первообразному тр. $\alpha\beta\gamma$, и то значенiе, которое припишемъ какой нибудь точкѣ первообразнаго тр., припишемъ также и *соотвѣтствующей*, *симметричной* точкѣ каждаго изъ остальныхъ треугольниковъ. Эти треугольники обозначаемъ: $\alpha\beta\gamma$ чрезъ $x = 2$, $y = 1$; $\alpha\beta\gamma'$ чрезъ $x = 1$, $y = 2$, и т. д., какъ значится на чертежѣ 3.

Чрт. 3.



Отношенiямъ существующимъ между треугольниками присвоиваемъ, для сокращенiя рѣчи, слѣдующiя наименованiя:

Отношенiе тр. $\begin{matrix} x = -2 \\ y = -1 \end{matrix}$, къ тр. $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$ называемъ *дiаметральной* симметрiей;

отношеніе тр.	$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$	къ	$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$	*первая діагональная* сим.;
»	» $\begin{matrix} x = -1 \\ y = -1 \end{matrix}$	»	»	*вторая діагональная* »
»	» $\begin{matrix} x = -2 \\ y = 1 \end{matrix}$	»	»	*первая прямая* »
»	» $\begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$	»	»	*вторая прямая* »
»	» $\begin{matrix} x = -1 \\ y = 2 \end{matrix}$	»	»	*первая облическая* »
»	» $\begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix}$	»	»	*вторая облическая* ».

Эти 8 значеній треугольника связаны между собою тою же зависимостію, которая существуетъ между Δx, Δy въ (1).

Точки первообразнаго тр., которыхъ число всегда $\frac{1}{8}\, p(p+2)$, въ настоящемъ же случаѣ, слѣдов., 10, перенумеровываемъ буквами $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$, и каждой изъ нихъ присвоиваемъ такой показатель, который опредѣлялъ бы число перемѣщеній возможныхъ для коня съ обозначенной клѣтки. По образцу одного треугольника распредѣляются значенія точкамъ и въ другихъ семи треугольникахъ (чертежъ 4).

Черт. 4.

a	*e*	*h*	*l*	*l*	*h*	*e*	*a*
e	*b*	*f*	*k*	*k*	*f*	*b*	*e*
h	*f*	*c*	*g*	*g*	*c*	*f*	*h*
l	*k*	*g*	*d*	*d*	*g*	*k*	*l*
l	*k*	*g*	*d*	*d*	*g*	*k*	*l*
h	*f*	*c*	*g*	*g*	*c*	*f*	*h*
e	*b*	*f*	*k*	*k*	*f*	*b*	*e*
a	*e*	*h*	*l*	*l*	*h*	*e*	*a*

За общій членъ 64-хъ клѣтокъ шашечницы примемъ символъ $A^{i}_{x',y}$. Подъ A разумѣется одна изъ 10-ти буквъ, i есть указатель числа *выходовъ* (перемѣщеній), а двойной нижній указатель опредѣляетъ тотъ треугольникъ, въ которомъ находится точка A^{i}.

При такомъ означеніи, какъ символъ одной точки, такъ и символъ двухъ точекъ *одного звена* — и даже выраженіе цѣлой цѣпи, имѣетъ, по числу треугольниковъ, *восемь* и только восемь значеній.

Начертимъ ли звено $a^2_{1,2}.f^6_{1,2}$, тотчасъ находимъ еще семь, и только семь, симметричныхъ звеньевъ: $a^2_{1,2}.f^6_{2,1}$, $a^2_{1,-2}.f^6_{1,-2}$, $a^2_{1,-2}.f^6_{2,-1}$, $a^2_{-1,-2}.f^6_{-1,-2}$, $a^2_{-1,-2}.f^6_{-2,-1}$, $a^2_{-1,2}.f^6_{-1,2}$, $a^2_{-1,2}.f^6_{-2,1}$. При этомъ замѣчаемъ, что такъ какъ $a_{1,2}=a_{2,1}$, $b_{1,2}=b_{2,1}$, $c_{1,2}=c_{2,1}$, $d_{1,2}=d_{2,1}$, и, вообще, $a_{y,x}=a_{x,y}$, $b_{y,x}=b_{x,y}$, $c_{y,x}=c_{x,y}$, $d_{y,x}=d_{x,y}$, то имѣемъ не 8.10 клѣтокъ, а $8.10-16=64$. *Діаметрально* симметричное звено получается, какъ видно изъ отношенія существующаго между ($y=1$, $x=2$) и ($y=-1$, $x=-2$), посредствомъ измѣненія $A_{y,x}$ въ $A_{-y,-x}$. *Первое діагонально* симметричное звено получается посредствомъ измѣненія $A_{y,x}$ въ $A_{x,y}$. и т. д., какъ показываетъ чертежъ 3. И такъ, ежели число *всѣхъ* звеньевъ существующихъ въ предѣлахъ данной шашечницы есть P, то различныхъ *категорій* звеньевъ будетъ непремѣнно $\frac{P}{8}$; и на оборотъ: ежели составимъ $\frac{P}{8}$ комбинацій

$$\begin{matrix} af,\ eh,\ ec,\ ek,\ bl,\ bg,\ hf,\ hg,\ hk,\ lc,\ lg, \\ lf,\ fk,\ fd,\ fg,\ kg,\ kd,\ kc,\ cd,\ gg,\ gd, \end{matrix} \qquad (K)$$

то найдемъ $P=8.21$.

Такихъ первообразныхъ комбинацій между $\frac{1}{8}\,p\,(p+2)$ клѣтками, какъ опредѣлилъ нѣкто Сливонсъ, всегда $\frac{1}{2}\,(p-1)\,(p-2)$. Общность этой формулы доказана Янишемъ. Эти то комбинаціи между клѣтками, будучи выражены, составятъ уравненія движенія въ предѣлахъ данной шашечницы.

Согласимся изображать чрезъ $\Delta A^i_{y,x}=A^{i+\delta}$ *возможное перемѣщеніе*, или *звено*, $A^i_{y,x}.A^{i+\delta}$, такъ что вмѣсто $a^2.f^6$ будетъ $\Delta a=f^6$: тогда, соотвѣтственно десяти клѣткамъ треугольника, всѣ перемѣщенія, возможныя въ предѣлахъ 64-хъ клѣточной доски, выразятся слѣдующими десятью уравненіями:



$$
\begin{aligned}
&\Delta a^2_{y,x} = f^6_{y,x} + f^6_{x,y} \\
&\Delta f^6_{y,x} = a^2_{y,x} + h^4_{x,y} + k^6_{x,y} + d^8_{y,x} + g^8_{y,-x} + l^4_{y,-x} \\
&\Delta h^4_{y,x} = e^3_{x,y} + f^6_{x,y} + g^8_{y,x} + k^6_{y,-x} \\
&\Delta k^6_{y,x} = e^3_{y,x} + f^6_{x,y} + g^8_{x,y} + d^8_{y,-x} + c^8_{y,-x} + h^4_{y,-x} \\
&\Delta e^3_{y,x} = h^4_{x,y} + c^8_{y,x} + k^6_{y,x} \\
&\Delta l^4_{y,x} = b^4_{y,x} + c^8_{y,x} + g^8_{y,-x} + f^6_{y,-x} \\
&\Delta b^4_{y,x} = l^4_{y,x} + l^4_{x,y} + g^8_{y,x} + g^8_{x,y} \qquad (5) \\
&\Delta c^8_{y,x} = e^3_{y,x} + e^3_{x,y} + l^4_{y,x} + l^4_{x,y} + k^6_{y,-x} + k^6_{-x,y} \\
&\qquad\qquad + d^8_{y,-x} + d^8_{-x,y} \\
&\Delta g^8_{y,x} = h^4_{y,x} + b^4_{y,x} + l^4_{y,-x} + f^6_{y,-x} + g^8_{x,-y} + d^8_{-x,-y} \\
&\qquad\qquad + g^8_{-x,y} + k^6_{x,y} \\
&\Delta d^8_{y,x} = f^6_{y,x} + f^6_{x,y} + k^6_{y,-x} + k^6_{-x,y} + c^8_{y,-x} + c^8_{-x,y} \\
&\qquad\qquad + g^8_{-x,-y} + g^8_{-y,-x}.
\end{aligned}
$$

Каждое изъ нихъ надо понимать единообразно такъ:

1) Членъ передъ которымъ поставленъ символъ Δ есть та точка, съ которой перемѣщеніе (звено, ходъ) начинается; каждый же изъ членовъ правой части того же равенства есть та точка, на которой движеніе прекращается. Такъ что, напримѣръ, перемѣщеніе съ точки $a^2_{y,x}$, по первому изъ этихъ уравненій, возможно на f^6, находящуюся въ *одномъ* треугольникѣ, и на f^6—въ діагонально симметричномъ треугольникѣ. Съ $f^6_{y,x}$ возможны 6 перемѣщеній опредѣляемыхъ вторымъ уравненіемъ (5), а для того чтобы получить сумму перемѣщеній съ $f^6_{x,y}$, надо только измѣнить въ этомъ уравненіи правый указатель въ лѣвый, и на оборотъ; такъ что

$$\Delta f^6_{x,y} = a^2_{x,y} + h^4_{y,x} + k^6_{y,x} + d^8_{x,y} + g^8_{-x,y} + l^4_{x,y}.$$

Такимъ образомъ, приписавъ указателямъ y,x членовъ лѣвыхъ частей уравненій послѣдовательно значенія $\begin{matrix} y = 1 \\ x = 2 \end{matrix}$, $\begin{matrix} y = 1 \\ x = -2 \end{matrix}$, и т. д., и произведя соотвѣтствующія измѣненія буквъ въ нумера въ правыхъ частяхъ этихъ же уравненій,

получимъ всего 80 уравненій. А такъ какъ 16 изъ нихъ, по причинѣ тождествъ $a_{y',x} = a_{x',y'}$, $b_{y',x} = b_{x',y'}$, $c_{y',x'} = c_{x',y'}$, $d_{y',x} = d_{x',y}$ совпадутъ съ другими 16-ю: то всего различныхъ уравненій заключающихся въ (5) будетъ 64.

2) Опредѣленіе числа путей, существующихъ между двумя данными клѣтками, приводится къ интегрированію въ конечныхъ разностяхъ слѣдующихъ десяти уравненій:

$$\begin{aligned}
a_{t+1} &= 2f_t \\
f_{t+1} &= a_t + h_t + k_t + d_t + g_t + l_t \\
h_{t+1} &= e_t + f_t + g_t + k_t \\
k_{t+1} &= e_t + f_t + g_t + d_t + c_t + h_t \\
e_{t+1} &= h_t + c_t + k_t \\
l_{t+1} &= b_t + c_t + g_t + f_t \\
b_{t+1} &= 2l_t + 2g_t \\
c_{t+1} &= 2(e_t + l_t + k_t + d_t) \\
g_{t+1} &= h_t + b_t + l_t + f_t + d_t + k_t + 2g_t \\
d_{t+1} &= 2(f_t + k_t + c_t + g_t),
\end{aligned} \qquad (5')$$

гдѣ t есть число ходовъ. Это потому, что каждое изъ уравненій (5) выражаетъ, что число путей существующихъ для коня отъ члена передъ которымъ поставлено Δ, въ какое нибудь число t ходовъ, до какой ни есть клѣтки шашешницы, равняется суммѣ путей существующихъ до той же точки отъ каждаго изъ членовъ правой части равенства въ $t-1$ ходовъ.

6. Система (5) составляетъ полнѣйшее выраженіе условій движенія коня не только въ предѣлахъ шашечницы $p=8$, но и *безъ повторенія*. Объ этомъ послѣднемъ условіи будетъ говорено ниже. Теперь скажемъ только нѣсколько словъ объ интегрированіи уравненій (5′), которыхъ вполнѣ достаточно, доколѣ условія неповторенія несуществуетъ.

Интегралъ этой системы найдется по общимъ правиламъ, но этимъ не закончатся вычисленія: главная трудность будетъ въ опредѣленіи *произвольныхъ постоянныхъ*. Десять выраже-

ній, которыя опредѣлятъ неизвѣстныя, придется раздробить на 32 (16 четныхъ и 16 нечетныхъ) выраженія, каждое съ особой произвольной постоянной; эти постоянныя придется опредѣлять либо ощупью, либо тѣмъ способомъ, который употребилъ Янишъ для исчисленія *кратчайшихъ путей* (томъ 1, Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs). Этимъ общимъ очеркомъ покамѣстъ ограничиваемся и переходимъ къ анализу движенія безъ *повторенія*.

7. ***Движеніе коня съ условіемъ не возвращаться на однажды тронутую клѣтку.***

Припомнимъ правила для дифференцированія алгебраическихъ количествъ. Пусть z^m, гдѣ m число цѣлое и положительное, данная функція: дифференціалъ ея есть, какъ извѣстно, $mz^{m-1}.dz$. Напишемъ Δz^m вмѣсто dz, и положимъ, что $\Delta z^m = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \ldots + z_m^{m_m}$. Подставляя это значеніе въ произведеніе $mz^{m-1}.\Delta z^m$, измѣнивъ при томъ m_1 въ $m_1 - 1, \ldots m_m$ въ $m_m - 1$, получаемъ:

$$mz^{m-1}\left(z_1^{m_1-1} + z_2^{m_2-1} + \ldots + z_m^{m_m-1}\right).$$

Возьмемъ теперь дифференціалъ количества между скобками, принимая, слѣдовательно, z за постоянное, и въ результатѣ, какъ прежде, замѣнимъ d характеристикой Δ; будетъ:

$$mz^{m-1}\left[(m_1-1)\,z_1^{m_1-2}\,.\,\Delta z_1 + (m_2-1)\,z_2^{m_2-2}\,.\,\Delta z_2 + \ldots + (m_m-1)\,z_m^{m_m-2}\,.\,\Delta z_m\right].$$

Эти самыя дѣйствія должны быть произведены надъ $A^i_{y,x}$, принимая i за дѣйствительный показатель. Если это сдѣлаемъ, то этимъ самымъ выразимъ движеніе коня въ предѣлахъ шамечницы $p = 8$ и притомъ *безъ повторенія;* и не только удовлетворимъ требуемымъ условіямъ, но и узнаемъ *искомое число рѣшеній*.

Согласимся изображать суммы послѣдовательныхъ станцій, то есть клѣтокъ на которыя можно будетъ перемѣстить коня, чрезъ U_0, U_1, $U_2 \ldots U_{63}$, и пусть $U_0 = a^2_{1,2}$ начальная станція, а $U_{63} = f^6_{2,1}$ — конечная.

Если бы $a^2{}_{1,2}$ представляла два возможныхъ перемѣщенія, то, поступивъ какъ выше объяснено, получили бы, сперва,

$$U_1 = 2a_{1,2} \, . \, \Delta a^2{}_{1,2},$$

а потомъ, такъ какъ по первому изъ уравненій (5),

$$\Delta a^2{}_{1,2} = f^6{}_{1,2} + f^6{}_{2,1},$$

нашли бы:

$$U_1 = 2a_{1,2} \, (f^{6-1}{}_{1,2} + f^{6-1}{}_{2,1}).$$

Но по предположенію на $f^6{}_{2,1}$ дозволяется ступить только въ послѣдній ходъ; а потому, вычтя изъ показателей членовъ $a^2{}_{1,2}$, $l^4{}_{-2,1}$, $h^4{}_{1,2}$, $k^6{}_{1,2}$, $g^8{}_{-2,1}$, $d^8{}_{1,2}$ по единицѣ, исключимъ изъ (5) членъ $f^6{}_{2,1}$. Такимъ образомъ получимъ:

$$U_0 = a^{2-1}{}_{1,2},$$

$$U_1 = a^0{}_{1,2} \, . \, f^{6-1}{}_{1,2}.$$

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя замѣчанія.

1) Показатель i, въ A^i, обращающійся въ коэффиціентъ, всегда опредѣляетъ число членовъ, которое должно удержать въ значеніи ΔA^i въ (5); такъ, когда имѣли $U_0 = a^2$, получили $U_1 = 2a \, (f^{6-1}{}_{1,2} + f^{6-1}{}_{2,1})$, *два члена*, когда же, по исключеніи $f^6{}_{2,1}$, получили $U_0 = a^1$: то и въ U_1 остался одинъ членъ.

2) Какой именно членъ долженъ быть исключенъ изъ значенія ΔA^i, это всегда покажетъ тотъ членъ, который непосредственно предшествуетъ характеристикѣ Δ; если же увидимъ по показателю $i-2$, что требуется исключить два члена, то другой исключаемый членъ будетъ непремѣнно находиться въ группѣ другихъ предшествующихъ характеристикѣ Δ членовъ. И такъ, $a^0{}_{1,2}$ удерживается для того, чтобы напоминать намъ клѣтку, на которую перемѣщеніе не дозволяется. Изъ показателя же члена $f^{6-1}{}_{1,2}$ узнаемъ, что въ значеніи

$$\Delta f^6{}_{1,2} = a^2{}_{1,2} + h^4{}_{2,1} + k^6{}_{2,1} + d^8{}_{1,2} + g^8{}_{1,-2} + l^4{}_{1,-2}$$

должно зачеркнуть одинъ членъ, а именно $a^2{}_{1,2}$, потому что только $a_{1,2}$ предшествуетъ f^{6-1} въ значеніи U_1.

3) Изъ показателей всѣхъ членовъ правой части ΔA^i вычитается по единицѣ для того, чтобы сдѣлать невозможнымъ возвращеніе на A^i чрезъ нѣсколько ходовъ. Такимъ образомъ напишемъ:

$$\Delta f^5_{1,2} = h^3_{2,1} + k^5_{2,1} + d^6_{1,2} + g^7_{1,-2} + l^3_{1,-2};$$

здѣсь изъ $d^8_{1,2}$ вычтено двѣ единицы потому, что перемѣщеніе $U_{63} = f_{2,1}$ недозволяется. Весьма полезно включать и $f_{2,1}$ въ послѣдовательныя значенія U; а потому напишемъ:

$$U_0 = f_{2,1}\ a_{1,2}\ ,\ U_1 = f^0_{2,1}\ a^0_{1,2}\ f^5_{1,2}.$$

За симъ переходимъ къ составленію значенія U_2.

Повторивъ на U_1 вышеобъясненное двойное дѣйствіе, то есть дифференцированіе $f^5_{1,2}$ и замѣненіе $df_{1,2}$ разностію $\Delta f^5_{1,2}$, найдемъ:

$$U_2 = 5f^0_{2,1}\ a^0_{1,2}\ f^4_{1,2}\ \Delta f^5_{1,2}.$$

А такъ какъ

$$\Delta f^5_{1,2} = h^3_{2,1} + k^5_{2,1} + d^6_{1,2} + g^7_{1,-2} + l^3_{1,-2},$$

то

$$U_2 = 5f^0_{2,1}\ a^0_{1,2}\ f^4_{1,2}\ (h^3_{2,1} + k^5_{2,1} + d^6_{1,2}\ g^7_{1,-2} + l^3_{1,-2}).$$

Теперь, такъ какъ сумма показателей членовъ между скобками есть 24, — сумма *дозволяемыхъ перемѣщеній* въ третій ходъ есть 24; иначе сказать, новое дифференцированіе и замѣненіе d значеніемъ Δ внесетъ въ сумму U_3, сравнительно U_2, новыхъ 24 члена, или 24 станціи. Если сдѣлаемъ это, получимъ:

$$U_3 = 5f^0_{2,1}a^0_{1,2}f^4 \{3h^2_{2,1}(e^2_{1,2} + g^7_{2,1} + k^5_{-2,1}) + 5k^4_{2,1}(e^2_{1,2} + g^7_{1,2} + d^7_{-2,1} + c^7_{-2,1} + h^3_{-2,1}) + 6d^5_{1,2}(k^5_{1,-2} + k^5_{-2,1} + c^7_{1,-2} + c^7_{-2,1} + g^7_{-2,-1} + g^7_{-1,-2}) + 7g^6_{1,-2}(h^3_{1,-2} + b^3_{1,-2} + l^3_{1,2} + g^7_{2,1} + d^7_{-2,1} + g^7_{-2,-1} + k^5_{2,-1}) + 3l^2_{1,-2}(b^3_{1,-2} + c^7_{1,-2} + g^7_{1,2})\}$$

Этой суммѣ можно дать иной, простѣйшій видъ; а именно отбросивъ члены и числа, находящіеся внѣ скобокъ, и взявъ

потомъ сумму только вновь вошедшихъ сюда 24 членовъ, получимъ:

$$U_3 = e^{2}_{1,2} + e^{2}_{2,1} + h^{3}_{-2,1} + h^{3}_{1,-2} + 2b^{3}_{1,-2} + l^{3}_{1,2} + 2k^{5}_{-2,1}$$
$$+ k^{5}_{1,-2} + k^{5}_{2,-1} + 2c^{7}_{1,-2} + 2c^{7}_{-2,1} + 2g^{7}_{1,2} + 2g^{7}_{2,1} +$$
$$2g^{7}_{-2,-1} + g^{7}_{-1,-2} + 2d^{7}_{-2,1}.$$

Коэффиціентъ каждаго изъ этихъ членовъ и есть число путей существующихъ отъ клѣтки $a_{1,2}$ въ три хода.

Теперь сумма произведеній изъ показателей на соотвѣтствующіе коэффиціенты есть 130; а потому число *варіантовъ*, или дозволяемыхъ перемѣщеній въ 4-й ходъ есть 130.

И дѣйствительно, если продифференцируемъ эти 24 члена, потомъ измѣнимъ d въ Δ, и наконецъ вмѣсто $\Delta e^{2}_{1,2}$, $\Delta e^{2}_{2,1}$ .. $\Delta d^{7}_{-2,1}$ подставимъ ихъ значенія доставляемыя (5), при чемъ надлежащіе члены исключимъ по правилу объясненному выше, а изъ показателей новыхъ членовъ вычтемъ надлежащее число единицъ: то получится слѣдующее значеніе для U_4:

$$U_4 = 5f^{0}_{2,1}\, a^{0}_{1,2}\, f^{4}_{1,2} \{ 3h^{2}_{2,1} [2e_{1,2} (c^{7}_{1,2} + k^{4}_{1,2}) + 7g^{6}_{2,1}(g^{6}_{1,-2}$$
$$+ b^{3}_{2,1} + l^{3}_{-2,1} + f^{5}_{-2,1} + g^{7}_{-1,2} + d^{7}_{-1,-2} + k^{4}_{1,2}) + 5k^{4}_{-2,1}$$
$$(e^{2}_{-2,1} + f^{5}_{-1,2} + g^{7}_{-1,2} + c^{7}_{2,1} + d^{5}_{2,1}) + 5k^{4}[2e_{2,1}(h^{2}_{1,2} + c^{7}_{1,2})$$
$$+ 7g^{6}_{1,2}(h^{2}_{1,2} + b^{3}_{1,2} + l^{2}_{1,-2} + f^{5}_{1,-2} + g^{7}_{2,-1} + d^{7}_{-2,-1} +$$
$$g^{7}_{-2,1}) + 7d^{6}_{-2,1}(f^{5}_{-2,1} + f^{5}_{-1,2} + k^{5}_{-1,-2} + g^{6}_{1,-2} + c^{7}_{-1,-2} +$$
$$c^{7}_{1,2} + g^{7}_{2,-1}) + 7c^{6}_{-2,1}(e^{2}_{-1,2} + e^{2}_{-2,1} + l^{3}_{-1,2} + l^{3}_{-2,1} +$$
$$k^{5}_{-1,-2} + d^{7}_{-2,-1} + d^{5}_{2,1}) + 3h^{2}_{-2,1}(e^{2}_{-1,2} + f^{5}_{-1,2} + g^{6}_{-2,1})]$$
$$+ 6d^{5}_{1,2} [5k^{4}_{1,-2}(e^{2}_{1,-2} + f^{5}_{2,-1} + g^{7}_{2,-1} + c^{7}_{2,1} + h^{2}_{1,2}) +$$
$$5k^{4}_{-2,1}(e^{2}_{-2,1} + f^{5}_{-1,2} + g^{7}_{-1,2} + c^{7}_{2,1} + h^{2}_{2,1}) + 7c^{6}_{1,-2}(l^{3}_{2,-1}$$
$$+ l^{2}_{1,-2} + e^{2}_{1,-2} + e^{2}_{2,-1} + k^{5}_{-2,-1} + k^{4}_{1,2} + d^{7}_{-1,-2}) + 7c^{6}_{-2,1}$$
$$(e^{2}_{-1,2} + e^{2}_{-2,1} + l^{3}_{-1,2} + l^{3}_{-2,1} + k^{5}_{-1,-2} + d^{7}_{-2,-1} + k^{4}_{2,1}) +$$
$$7g^{6}_{-2,-1}(h^{3}_{-2,-1} + b^{3}_{-2,-1} + l^{3}_{2,-1} + f^{5}_{2,-1} + g^{6}_{1,-2} + g^{7}_{-1,2}$$
$$+ k^{5}_{-1,-2}) + 7g^{6}_{-1,-2}(h^{3}_{-1,-2} + b^{3}_{-1,-2} + l^{3}_{-1,2} + f^{5}_{-1,2} +$$
$$g^{7}_{-2,1} + g^{7}_{2,-1} + k^{5}_{-2,-1})] + 7g^{6}_{1,-2}[3h^{2}_{1,-2}(e^{2}_{2,-1} + f^{5}_{2,-1} +$$
$$k^{4}_{1,2}) + 3b^{2}_{1,-2}(l^{2}_{1,-2} + l^{3}_{2,-1} + g^{7}_{2,-1}) + 3l^{2}_{1,2}(b^{3}_{1,2} + c^{7}_{1,2} +$$

$f^5_{1,-2}) + 7g^6_{2,1}(h^2_{2,1} + b^3_{2,1} + l^3_{-2,1} + f^5_{-2,1} + g^7_{-1,2} + d^7_{-1,-2}$
$+ k^4_{1,2}) + 7d^6_{-2,1}(f^5_{-2,1} + f^5_{-1,2} + k^5_{-1,-2} + k^4_{2,1} + c^7_{-1,-2} +$
$c^7_{1,2} + g^7_{2,-1}) + 7g^6_{-2,-1}(h^3_{-2,-1} + b^3_{-2,-1} + l^3_{2,-1} + f^5_{2,-1} +$
$g^7_{-1,2} + d^5_{1,2} + k^5_{-1,-2}) + 5k^4_{2,-1}(e^2_{2,-1} + f^5_{1,-2} + d^7_{-1,-2} +$
$c^7_{-1,-2} + h^3_{-2,-1})] + 3l^2_{1,-2}\,[3b^2_{1,-2}(l^3_{2,-1} + g^7_{2,-1} + g^6_{1,-2})$
$+ 7c^6_{1,-2}(l^3_{2,-1} + e^2_{1,-2} + e^2_{2,-1} + k^5_{-2,-1} + k^4_{1,2} + d^7_{-1,-2}$
$+ d^5_{1,2}) + 7g^6_{1,2}\,(h^2_{1,2} + b^3_{1,2} + l^2_{1,-2} + k^4_{2,1} + f^5_{1,-2} + g^7_{2,-1} +$
$d^7_{-2,-1} + g^7_{-2,1})]$.

Или, по приведеніи въ простѣйшій видъ,

$U_4 = 3e^2_{-1,2} + 4e^2_{2,-1} + 4e^2_{-2,1} + 3e^2_{1,-2} + 4h^2_{1,2} + 2h^2_{2,1} +$
$3h^3_{-2,-1} + h^3_{-1,-2} + 3l^2_{1,-2} + 6l^3_{2,-1} + 3l^3_{-1,2} + 4l^2_{-2,1} +$
$6k^4_{1,2} + 3k^5_{-2,-1} + 6k^5_{-1,-2} + 3k^4_{2,1} + 6f^5_{-1,2} + 4f^5_{2,-1} +$
$4f^5_{1,-2} + 4f^5_{-2,1} + 5b^3_{1,2} + 3b^3_{-2,-1} + 8c^7_{1,2} + 3c^7_{-1,-2} +$
$4g^6_{-2,1} + 4g^6_{1,-2} + 8g^7_{2,-1} + 6g^7_{-1,2} + 4d^5_{2,1} + 9d^7_{-1,-2}$.

Въ этомъ значеніи U_4 сумма произведеній показателей на соотвѣтствующіе коэффиціенты, а въ первомъ значеніи U_4 сумма показателей вновь вошедшихъ 130 членовъ, равна 594; а потому это и есть число дозволяемыхъ перемѣщеній въ шестой ходъ. Но при этомъ необходимо заявить новое правило. Ясно, что ступивъ напримѣръ на клѣтку $f^5_{-1,2}$ нельзя иначе перемѣстить отсюда коня какъ на $a_{-1,2}$, ибо въ противномъ случаѣ обходъ остановится не на $f_{2,1}$, а на $a_{-1,2}$, въ которую клѣтку конь попадетъ изъ $f_{-2,1}$. И такъ, вотъ общее правило при производствѣ обхода въ $p^2 - 1$ ходовъ всѣхъ p^2 клѣтокъ, или точнѣе $p^2 - 1$ клѣтокъ, потому что конечная станція изъ уравн. (5) исключается.

Ежели при подстановленіи вмѣсто ΔA^i нѣкоторой суммы і членовъ замѣтимъ, что показатель одного изъ нихъ есть 1: то этотъ только членъ и долженъ быть введенъ въ U_n вмѣсто ΔA^i.

Изъ этого правила проистекаетъ слѣдующій *короллярій: Обходъ не будетъ доведенъ до конца, ежели въ значеніи ΔA^r найдется болѣе одного члена съ показателемъ 1.*

На основаніи только-что сказаннаго правила, дѣйствительно возможныхъ перемѣщеній въ U_5 будетъ не 594, а, по причинѣ $4f^5$ заключающихся въ U_4, только $591 - 16 = 578$. Однако же исчислять дальнѣйшія значенія U_n мы отказываемся. Наша цѣль покамѣстъ только та, чтобы указать существованіе математическсго способа опредѣлить вмѣстѣ съ числомъ обходовъ также и самые обходы; и этотъ способъ основанъ преимущественно на уравненіяхъ (5), которыя получились вслѣдствіе замѣненія обыкновенныхъ координатъ *первообразнымъ треугольникомъ*. Мы показали, что происхожденіе U_{n+1} изъ U_n весьма сходно съ происхожденіемъ дифференціала изъ алгебраическаго количества. Затрудненіе въ настоящемъ случаѣ происходитъ только оттого, что въ произведеніе вида $iA^{i-1}\Delta A^i$ приходится подставлять вмѣсто ΔA^i сумму i членовъ съ перемѣнными и различными между собою показателями. Но это затрудненіе далеко не непреодолимо, и, главнымъ образомъ, вотъ почему.

По свойству хода коня, та клѣтка, которая можетъ быть достигнута имъ въ $2n$ ходовъ, не можетъ быть имъ достигнута въ $2n+1$ ходовъ: а потому тѣ члены, которые войдутъ въ U_{2n}, не войдутъ въ U_{2n+1}. Между тѣмъ изъ значеній U_4, U_3 видно, что уже въ U_6 войдутъ всѣ *четныя* станціи кромѣ $a_{1,2}$, а въ U_5 всѣ *нечетныя* кромѣ $f_{1,2}$ и $f_{2,1}$; то есть, начиная съ U_7, въ U_{2n+1} будетъ 30 членовъ, а въ U_{2n+2} — 31 членъ; а потому легко будетъ уловить происхожденіе значеній послѣдовательныхъ суммъ варіантовъ; такъ что вся трудность заключается въ опредѣленіи U_5, U_6, U_7 и U_8. Если же узнаемъ число смыкающихся цѣпей, то, какъ сейчасъ будетъ доказано, легко узнаемъ и число всѣхъ несмыкающихся обходовъ.

Главная цѣль настоящей записки есть, какъ сказано, изысканіе способовъ опредѣлять только *число* обходовъ, а не самые обходы; а потому этимъ предметомъ мы и займемся.

8. *О числѣ задачъ.* Число задачъ, которыя можно предложить себѣ на четной шашечницѣ, $p = 2n$, измѣняя крайнія

точки цѣпи, есть $\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 = \frac{p^4}{4}$; ибо, принявъ послѣдовательно каждую изъ $\frac{p^2}{2}$ четныхъ клѣтокъ за начальную станцію, а каждую изъ $\frac{p^2}{2}$ нечетныхъ клѣтокъ за конечную станцію, исчерпаемъ всѣ рѣшенія; а число комбинацій четныхъ съ нечетными клѣтками и есть $\frac{p^2}{2}.\frac{p^2}{2}$. Иначе сказать: такъ какъ отъ перемѣны порядка въ крайнихъ двухъ станціяхъ рисунокъ цѣпи неизмѣняется: то число графически различныхъ между собою цѣпей, на сколько оно зависитъ отъ комбинацій между p^2 клѣтками взятыми по двѣ, одна для начала движенія, другая для конца, есть $\frac{p^4}{4}$.

Но число задачъ, которыя рѣшить *достаточно*, гораздо менѣе $\frac{p^4}{4}$. Въ самомъ дѣлѣ, во 1-хъ, за начальную станцію обходовъ достаточно принять послѣдовательно каждую изъ $\frac{1}{8}p(p+2)$ клѣтокъ одного изъ восьми треугольниковъ; во 2-хъ, по причинѣ симметричнаго расположенія клѣтокъ относительно большихъ діагоналей, за конечныя станціи тѣхъ обходовъ, которые начнутся съ станцій a, b, c, d, всего $\frac{p}{2}$, находящихся на сказанной діагонали, достаточно взять $\frac{p^2}{4}$ клѣтки, находящіяся по одну сторону діагонали; въ 3-хъ, каждая изъ остальныхъ клѣтокъ треугольника имѣетъ, по причинѣ *облической симметріи* (*первой* и *второй*), двѣ клѣтки равно удаленныя отъ нея; напр. разстояніе отъ $e^3{}_{1,2}$ до $e^3{}_{2,-1}$ равно разстоянію отъ $e^3{}_{1,2}$ до $e^3{}_{-2,1}$, а потому достаточно узнать число путей существующихъ между двумя изъ нихъ; и въ 4-хъ, число смыкающихся цѣпей отъ крайнихъ станцій не зависитъ (см. нум. 4), а потому достаточно исчерпать всѣ

обходы, существующіе между клѣтками отдѣленными одна отъ другой однимъ изъ $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ первообразныхъ звеньевъ.

На такомъ основаніи число задачъ, которыя исчерпать *необходимо* и *достаточно*, опредѣлится такимъ образомъ.

1). Относительно a имѣемъ $\frac{p^2}{4}$ задачъ; относительно b — $\frac{p^2}{4}-1$ задачъ, потому что число обходовъ отъ b до a равно числу обходовъ отъ a до b; такимъ образомъ число задачъ относительно каждой изъ остальныхъ клѣтокъ, находящихся на большой діагонали, получится послѣдовательнымъ вычитаніемъ 2, 3, и т. д. до $\frac{p}{2}-1$ включительно, изъ одного и того же количества $\frac{p^2}{4}$; а потому сумма всѣхъ задачъ относительно $\frac{p}{2}$ діагональныхъ клѣтокъ есть $N_1=\frac{1}{8}p(p^2-p+2)$.

2) Ясно, что отъ клѣтки о трехъ выходахъ, которую изобразимъ чрезъ e^3, до діагональныхъ клѣтокъ $a^2, b^4, \ldots$ задачи тѣ же, что отъ этихъ послѣднихъ до e^3; то же самое должно будетъ повторить объ f, g, и т. д., относительно клѣтокъ a, b, c, d, e, уже взятыхъ за начала обходовъ; а потому относительно e^3 имѣемъ $\frac{p^2}{2}-(p+1)$ задачъ (единица вычитается по причинѣ симметріи клѣтокъ $e^3_{2,-1}$, $e^3_{-2,1}$); относительно f^6: $\frac{p^2}{2}-(p+1)-4.1$; относительно g^8: $\frac{p^2}{2}-(p+1)-2.4$, и т. д.; такъ что сумма всѣхъ задачъ относительно клѣтокъ находящихся по малой діагонали съ e^3, f^6, всего $\frac{p}{2}-1$ клѣтокъ, будетъ

$$N_2=\frac{1}{4}(p-2)(p^2-4p+6).$$

3) Значенія $N_3, N_4, \dots N_{\frac{p}{2}}$ получатся изъ N_2 посредствомъ измѣненія, послѣдовательно, p въ $p-2$, въ $p-4$, и т. д., до $p-(p-2)$ включительно; такъ что будетъ:

$$N_3=\frac{1}{4}(p-4)(p^2-8p+18)$$

$$N_4=\frac{1}{4}(p-6)(p^2-12p+38)$$

$$N_5=\frac{1}{4}(p-8)(p^2-16p+66)$$

. . . .

и потому

$$N_2+N_3+\dots+N_{\frac{p}{2}}=\frac{p}{32}(p^3-4p^2+8p-8).$$

Приложивъ же сюда N_1, получимъ:

$$\Sigma N_r=\frac{p^2}{32}(p^2+4).$$

Въ этомъ числѣ заключается $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ тождественныхъ задачъ для исчерпанія смыкающихся цѣпей: вычтя изъ ΣN_r это число безъ единицы, найдемъ, окончательно,

$$N=\frac{1}{32}p(p^3-12p+48).$$

Въ случаѣ $p=8$ будетъ:

$$N=116.$$

Этотъ вопросъ относительно числа задачъ ни кѣмъ до насъ не былъ рѣшенъ; вотъ почему мы имъ занялись. Сколь необходимо знать это число N — впослѣдствіе окажется.

9. *О правилѣ Варнсдорфа.* Въ механикѣ предлагается слѣдующій замѣчательный принципъ: для равновѣсія какой нибудь системы необходимо и достаточно, *чтобы силы не стремились произвести ни одного изъ возможныхъ перемѣщеній.*

Въ проблемѣ коня существуетъ также нѣчто подобное, а именно: для того, чтобы обходъ удался, необходимо и достаточно, *чтобы конь производилъ только одни возможные ходы.* Въ нумерѣ 7 мы отчасти уже коснулись вопроса о томъ, какое перемѣщеніе невозможное и какое возможное; ниже будетъ предложено иное рѣшеніе. Но частное рѣшеніе этого вопроса, весьма замѣчательное, предложено еще въ 1823 г. въ брошюрѣ подъ заглавіемъ: «Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung». Авторъ этой брошюры, нѣкто Варнсдорфъ, предложилъ свое рѣшеніе въ слѣдующихъ двухъ частяхъ:

1) Обходя конемъ шашечницу, должно ступать имъ всегда на ту клѣтку, которая, сравнительно съ другими клѣтками, представляетъ наименьшее число выходовъ; такъ что если бы въ какой нибудь ходъ можно было ступить съ c^8 на l^4 и на e^3, то надлежало бы ступить на e^3.

2) Если же клѣтокъ удовлетворяющихъ этому условію будетъ нѣсколько, то можно ступить на любую изъ нихъ.

Наша система означенія позволяетъ весьма легко объяснить и выразить это правило.

И такъ, пусть $U_0 = a^2{}_{y',x}$ начальная станція: тогда на основаніи второй части правила имѣемъ

$$U_1 = f^{6-1}{}_{y',x} + f^{6-1}{}_{x',y'}$$

а потомъ, на основаніи первой части правила,

$$U_2 = h^{4-1}{}_{x',y} + h^{4-1}{}_{y',x} + l^{4-1}{}_{y',x} + l^{4-1}{}_{x',y'}$$

потому что клѣтка k^{6-1} представляетъ 5, d^{8-2}—6, g^{8-1}—7 выходовъ. Далѣе,

$$U_3 = e^{3-1}{}_{y',x} + e^{3-1}{}_{x',y} + b^{4-1}{}_{y'-x} + b^{4-1}{}_{-x',y'}$$

потому что показатели въ другихъ членахъ >2 и >3, и т. д.

Само по себѣ правило это не составляетъ важнаго открытія, какъ это доказано Янишемъ (Томъ II. Traité des applications etc.); но оно чрезвычайно важно, какъ *пособіе* для опредѣленія числа всѣхъ рѣшеній съ возможно большею точностію.

Сперва предположимъ себѣ обойдти 64-хъ клѣточную доску по правилу Варнсдорфа, начавъ обходъ съ $a^2{}_{1,2}$, и окончивъ

его клѣткой $f^6_{-1,-2}$; но при каждомъ ходѣ станемъ отмѣчать на клѣткѣ то число выходовъ, которое въ ней найдется, наблюдая при томъ, чтобы клѣткѣ A^i, имѣющей i выходовъ, приписывать только одинъ выходъ, если ходъ изъ нея на слѣдующую клѣтку будетъ *форсированъ*.

Если это исполнимъ, какъ показываетъ напр. чер. 5, а потомъ возьмемъ произведеніе этихъ чиселъ, показывающихъ *дозволяемыя перемѣщенія*: то это произведеніе и будетъ искомымъ числомъ обходовъ, доставляемыхъ правиломъ Варнсдорфа въ избранномъ нами случаѣ. Это произведеніе есть

Черт. 5.

16 1	31 1	12 1	39 1	26 1	29 1	10 1	63 1
13 1	38 2	15 1	30 1	11 1	f	25 1	28 1
32 1	17 1	40 1	53 1	46 1	27 1	62 1	9 1
37 3	14 1	47 1	50 2	59 1	54 1	45 1	24 1
18 1	33 1	52 1	41 3	48 1	61 1	8 1	55 2
3 1	36 1	49 1	60 1	51 2	58 1	23 1	44 1
34 2	19 1	2 2	5 1	42 2	21 1	56 2	7 1
1 2	4 1	35 1	20 3	57 1	6 1	43 1	22 1

Вверху нум. станціи, внизу — число перемѣщеній.

$$S_1 = 2^9 . 3^3 . 1^{51}.$$

Положимъ, что число обходовъ отъ перемѣны значеній точекъ начала и конца цѣпи неизмѣняется: тогда полное число рѣшеній, доставляемыхъ правиломъ Варнсдорфа, будетъ:

$$S_1' = 32^2 . 2^9 . 3^3 = 14\,155\,776.$$

10. ***Новый способъ опредѣлять число рѣшеній, основанный на правилѣ Варнсдорфа.***

Теперь легко будетъ понять, въ чемъ состоитъ сказанное пособіе, доставляемое правиломъ Варнсдорфа.

Пусть $a^2_{1,2}$ начало, а $f^6_{2,1}$ конецъ цѣпи.

Первый ходъ приведетъ коня на $f^{6-1}_{1,2}$, а съ этой клѣтки можно будетъ ступить на любую изъ слѣдующихъ пяти клѣтокъ: $h^{4-1}_{2,1}$, $k^{6-1}_{2,1}$, $l^{4-1}_{1,-2}$, $g^{8-1}_{1,-2}$, $d^{8-2}_{1,2}$: напишемъ же на $a^{2}_{1,2}$ — 1, а на $f^{6}_{1,2}$ — 5, и будемъ помнить, что вписываемыя въ клѣтки числа означаютъ числа *дозволяемыхъ перемѣщеній* на первомъ и второмъ ходахъ. Далѣе разсуждаемъ: ежели согласно правилу Варнсдорфа ступимъ въ слѣдующій ходъ на $h^{4-1}_{2,1}$, которая доставляетъ только три перемѣщенія, и предположимъ, что каждая изъ остальныхъ четырехъ клѣтокъ, на которыя можно было ступить, доставляетъ также по три перемѣщенія; то будемъ увѣрены, что произведеніе $3.5 = 15$ менѣе истиннаго числа дозволяемыхъ перемѣщеній на третьемъ ходѣ. И дѣйствительно, выше доказано, что истинное число есть 24. Точно также можемъ быть увѣрены, что, ступивъ съ $h^{4-1}_{2,1}$ по правилу Варнсдорфа на $e^{3-1}_{1,2}$, и положивъ, что и всякая другая станція доставила бы только два перемѣщенія, можемъ быть увѣрены, что $5.3.2 = 30$ менѣе истиннаго числа дозволяемыхъ перемѣщеній, которое, какъ мы видѣли, есть 130.

Послѣ этого уже не трудно понять нашу мысль.

Мы обойдемъ шашечницу по правилу Варнсдорфа, но каждой клѣткѣ, на которую ступимъ, припишемъ не то число перемѣщеній, которое дозволяется этимъ правиломъ, а *истинное число возможныхъ перемѣщеній*; доведя же обходъ до конца, возьмемъ произведеніе всѣхъ чиселъ вписанныхъ въ клѣтки. Къ этому присовокупимъ слѣдующую предосторожность для опредѣленія *дѣйствительно возможныхъ перемѣщеній:* клѣткѣ A^{i} только тогда припишемъ i перемѣщеній, когда предположеніе это оправдается по крайней мѣрѣ двумя послѣдующими ходами. Этою предосторожностію мы исправимъ тотъ небольшой недостатокъ во второй части правила Варнсдорфа, который замѣченъ Янишемъ.

На чер. 6 обходъ выполненъ и клѣткамъ приписаны числа (подъ нумерами ходовъ), выражающія *дѣйствительно возмож-*

ныя перемѣщенія; а потому *minimum* обходовъ существующихъ между клѣтками $a^2{}_{1,2}$, $f^6{}_{2,1}$ (то есть смыкающихся цѣпей) есть:

Черт. 6.

16 *1*	31 *2*	12 *3*	43 *3*	26 *2*	29 *3*	10 *2*	41 *1*
13 *2*	44 *3*	15 *1*	30 *3*	11 *5*	42 *4*	25 *3*	28 *2*
32 *2*	17 *4*	46 *2*	49 *2*	56 *2*	27 *4*	40 *1*	9 *3*
45 *2*	14 *4*	55 *1*	52 *2*	47 *2*	50 *1*	57 *2*	24 *3*
18 *3*	33 *4*	48 *2*	63 *1*	54 *2*	61 *1*	8 *5*	39 *3*
3 *3*	*f*	53 *2*	36 *4*	51 *1*	58 *1*	23 *4*	60 *1*
34 *2*	19 *3*	2 *5*	5 *4*	62 *1*	21 *1*	38 *3*	7 *2*
1 *1*	4 *2*	35 *2*	20 *3*	37 *2*	6 *3*	59 *1*	22 *1*

$$2^{21}.\,3^{15}.4^{8}.\,5^{3} = S_2.$$

Число же всѣхъ обходовъ, весьма близкое къ истинному итогу, будетъ

$$32^2.\,S_2 = S_3.$$

О степени приближенія этого результата къ истинному числу обходовъ будетъ говорено. Теперь покамѣстъ достовѣрно то, что можно опредѣлить *отношеніе* между итогами обходовъ 116-ти категорій, изчисленныхъ въ нум. 8; вслѣдствіе чего полное рѣшеніе проблемы приводится въ зависимость отъ частнаго рѣшенія одной изъ этихъ категорій, а это послѣднее найдется, лишь только опредѣлится истинное число обходовъ доставляемыхъ правиломъ Варнсдорфа для той же категоріи. Такъ напр. этотъ же чертежъ 6 доставляетъ по методѣ Варнсдорфа,

$$S_1'' = 2^{10}.\,3^2,$$

а потому, во первыхъ, имѣемъ

$$\frac{S_1}{S_1''} = \frac{3}{2},$$

во вторыхъ

$$\frac{S_2}{S_1''} = 2^{11}. 3^{13}. 4^8. 5^3.$$

Такъ что если только найдемъ истинное значеніе S_1'', то S_2 получится изъ

$$S_2 = S_1{}^{11}. 2''. 3^{13}. 4^8. 5^3.$$

Послѣ чего останется приложить нашъ способъ, который доставилъ S_2 (чер. 6), къ другимъ 115-ти задачамъ.

Въ этомъ упрощеніи проблемы и заключается главная заслуга методы Варнсдорфа.

11. *Число рѣшеній, доставляемое методомъ болѣе или менѣе противоположнымъ правилу Варнсдорфа, менѣе S_2.*

Это предложеніе докажется весьма просто. Мы начнемъ обходъ отъ клѣтки въ 8 выходовъ, напр. отъ $g^8{}_{1,-2}$, и, ступая по клѣткамъ съ наибольшимъ числомъ дозволяемыхъ перемѣщеній, станемъ приписывать это число также и другимъ клѣткамъ, на которыя можно будетъ ступить въ тотъ же самый ходъ. Если это сдѣлаемъ, и при томъ такъ, чтобы обходъ совершился: то, какъ показываетъ чер. 7, произведеніе изъ чиселъ дозволяемыхъ перемѣщеній будетъ:

Черт. 7.

46	61	36	19	48	63	34	21
37	18	47	62	35	20	49	64
60	45	16	3 *7*	6 *7*	11 *7*	22	33
17	38	7 *7*	10 *6*	15 *5*	4 *6*	13 *4*	50
44	59	2 *7*	5 *7*	12 *5*	9 *6*	32	23
39	28	41	8 *7*	1 *8*	14 *6*	51	54
58	43	26	29	56	53	24	31
27	40	57	42	25	30	55	52

Клѣтки, въ которыхъ вписанъ только нумеръ хода, доставляютъ только по одному возможному перемѣщенію.

$$S_4 = 8.7^7.6^4.5^2.4.$$

Сравнивая результаты, видимъ, что $S_2 > S_4$. Что и требовалось доказать.

12. *О наибольшемъ числѣ рѣшенiй ближайшемъ къ истинному ихъ числу.*

Выше было доказано, что число звеньевъ, которыя могутъ быть построены на 64-хъ клѣточной доскѣ, есть 168; а изъ нумера 7 знаемъ, что исчерпывая всѣ рѣшенiя *способомъ математическимъ*, каждое звено строится и считается за дозволяемое перемѣщенiе только одинъ разъ; ступивъ напримѣръ, съ a^2 на f^6, тотчасъ вычитаемъ изъ обоихъ показателей по единицѣ: а потому, ежели припишемъ каждой изъ 64-хъ клѣтокъ по $\frac{168}{64}$ выходовъ, и возьмемъ произведенiе этихъ чиселъ, — можемъ быть увѣрены, что число

$$\Sigma C = 32^2 . \left(\frac{168}{64}\right)^{64},$$

выразитъ наибольшее число обходовъ и при томъ ближайшее къ истинному итогу, для шашечницы $p = 8$. А для какой ни есть шашечницы будетъ:

$$\Sigma C = \frac{p^4}{4}\left[\frac{4(p-1)(p-2)}{p^2}\right]^{p^2}.$$

Что этотъ итогъ дѣйствительно весьма близокъ къ истинному итогу, видно изъ сравненiя предѣльныхъ чиселъ ΣC, S_3 между собою. Мы обозначаемъ чрезъ C_1, C_2, ... C_{116} отдѣльные итоги рѣшенiй соотвѣтственно 116 задачамъ, а чрезъ ΣC ихъ сумму.

13. *Другой способъ опредѣлять число рѣшенiй.*

Способъ, изложенный въ нумерѣ 10, который мы будемъ называть *первымъ способомъ*, вполнѣ удовлетворителенъ; ибо число обходовъ, отъ $a_{1,2}$ до $f_{2,1}$, доставляемыхъ правиломъ Варнсдорфа, исчерпать весьма легко: но существуетъ еще и дру-

гой способъ весьма большой точности и общности. Мы заявимъ его слѣдующимъ образомъ.

Для того чтобы опредѣлить число обходовъ 64-хъ клѣточной доски, необходимо и достаточно найдти 11.116 различныхъ *по числу входящихъ въ цѣпь первообразныхъ звеньевъ* рѣшеній. Положивши эти рѣшенія на чертежъ, опредѣлимъ, какъ показано выше, число перемѣщеній дозволяемыхъ каждой изъ клѣтокъ построенныхъ обходовъ; потомъ изъ каждаго рѣшенія выведемъ произведеніе чиселъ дозволяемыхъ перемѣщеній. Сумма этихъ 11.116 произведеній и будетъ искомымъ числомъ обходовъ.

Это заявленіе содержитъ въ себѣ нѣсколько предложеній, требующихъ доказательства; важнѣе же всего доказать то, что *совокупность всѣхъ суммованій*, объясненныхъ въ нум. 7, необходимо выразится одной и той же формулой для какого ни есть p, и что эта формула будетъ всегда слѣдующая:

$$C_r = 8^\alpha . 7^\beta . 6^\gamma . 5^\delta . 4^\varepsilon . 3^\zeta . 2^\eta . 1^\vartheta; \qquad (6)$$

$\alpha, \beta, \ldots \vartheta$ суть неопредѣленные показатели, которые должны будутъ удовлетворить совокупнымъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta &= p^2 - 1 \\ 8\alpha + 7\beta + 6\gamma + 5\delta + 4\varepsilon + 3\zeta + 2\eta + \vartheta &= 4(p-1)(p-2) - Z, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

гдѣ Z нѣкоторое перемѣнное, функція p и неопредѣленныхъ показателей.

Доказательство. — Извѣстно (нум. 5), что число *категорій* звеньевъ, то есть *первообразныхъ комбинацій* соотвѣтствующихъ $\frac{1}{8}p(p+2)$ клѣткамъ одного изъ 8-ми треугольниковъ, есть

$$K = \frac{1}{2}(p-1)(p-2);$$

а потому если $B_1, B_2 \ldots B_k$ числа тѣхъ звеньевъ этихъ K категорій, которыя заключаются въ построенной цѣпи: то, по условію, будетъ:

$$B_1 + B_2 + \dots + B_k = p^2 - 1. \qquad (8)$$

Каждому изъ этихъ неизвѣстныхъ чиселъ можно приписать только 9 значеній: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; ибо каждая изъ K категорій заключаетъ въ себѣ только 8 звеньевъ. И такъ, пусть x^{VIII} есть число тѣхъ изъ неизвѣстныхъ, которыя равны 8, такъ что $8x^{\text{VIII}}$ изобразитъ ихъ сумму; x^{VII} число неизвѣстныхъ, изъ коихъ каждая равна 7, такъ что ихъ сумма будетъ $7x^{\text{VII}}$; и, такимъ же образомъ, обозначимъ чрезъ x^{VI}, x^{V}, x^{IV}, x^{III}, x^{II}, x^{I} числа неизвѣстныхъ, входящихъ въ (8), равныхъ соотвѣтственно: 6, 5, 4, 3, 2, 1, такъ что ихъ суммы изобразятся соотвѣтственно чрезъ $6x^{\text{VI}}$, $5x^{\text{V}}$, $4x^{\text{IV}}$, $3x^{\text{III}}$, $2x^{\text{II}}$, x^{I}: тогда слѣдующія два уравненія будутъ имѣть мѣсто:

$$\left.\begin{aligned} 8x^{\text{VIII}} + 7x^{\text{VII}} + 6x^{\text{VI}} + 5x^{\text{V}} + 4x^{\text{IV}} + 3x^{\text{III}} + 2x^{\text{II}} + x^{\text{I}} &= p^2 - 1 \\ x^{\text{VIII}} + x^{\text{VII}} + x^{\text{VI}} + x^{\text{V}} + x^{\text{IV}} + x^{\text{III}} + x^{\text{II}} + x^{\text{I}} &= K - Z_1; \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

гдѣ Z_1 нѣкоторое цѣлое и положительное число, о значеніяхъ котораго будетъ говорено.

Далѣе, разсуждаемъ: такъ какъ 8 звеньевъ *одной* категоріи, будучи взяты по 8, доставляютъ $\frac{8.7.6\dots.1}{1.2.\dots..8} = 1$ комбинацію, то x^{VIII} категорій доставятъ $1^{x^{\text{VIII}}}$ комбинацій; то есть ихъ можно построить только однимъ способомъ, а именно: въ каждомъ изъ 8-ми треугольниковъ проведется по одному звену. Потомъ, такъ какъ 8 звеньевъ *одной* категоріи, будучи взяты по 7, доставляютъ $\frac{8.7\dots.2}{1.2\dots.7} = 8$ комбинацій, — x^{VII} категорій доставятъ $8^{x^{\text{VII}}}$ комбинацій; то есть 7 звеньевъ можно построить на 8 различныхъ маперъ. Такимъ же разсужденіемъ найдемъ, что 8 звеньевъ *одной* категоріи взятыя по 6, 5, 4, 3, 2, 1 доставятъ соотвѣтственно $\frac{8.7\dots.3}{1\dots..6} = 28$, $\frac{8\dots.4}{1\dots.5} = 56$, $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$, $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$, $\frac{8.7}{1.2} = 28$, $\frac{8}{1} = 8$, а

x^{VI}, ... x^{I} категорій доставятъ соотвѣтственно $28^{x^{VI}}$, $56^{x^{V}}$, $70^{x^{IV}}$, $56^{x^{III}}$, $28^{x^{II}}$, $8^{x^{I}}$ комбинацій.

Если бы для каждой изъ $8^{x^{VII}}$ комбинацій имѣли мѣсто всѣ другія исчисленныя комбинаціи, то число всѣхъ рѣшеній (обходовъ, цѣпей) для *одной* системы значеній неизвѣстныхъ въ (8) было бы

$$C_1' = 8^{x^{VII}} . 28^{x^{VI}} . 56^{x^{V}} . 70^{x^{IV}} . 56^{x^{III}} . 28^{x^{II}} . 8^{x^{I}},$$

а для полнаго числа системъ значеній (maximum есть 9^k), которое означимъ чрезъ L, оно было бы $L.C_1'$.

Но легко понять, что произвольный выборъ не всегда можетъ имѣть мѣсто изъ *осьми* звеньевъ. Положимъ, что $8af$ построены, и требуется начертить одно fh, одно fl, одно fg: ясно, что только одно изъ нихъ будетъ избрано изъ 8-ми; построивши fh, нельзя провести изъ этой же точки, въ которой уже соединены два звена, еще третье звено; а потому fl придется избрать не изъ $8fl$, а изъ $7fl$; послѣ чего fg останется избрать изъ $6fg$.

Дабы уловить всѣ эти случайности, полагаемъ

$$\begin{aligned}
x^{VII} &= m_8^{VII} + m_7^{VII} \\
x^{VI} &= m_8^{VI} + m_7^{VI} + m_6^{VI} \\
x^{V} &= m_8^{V} + m_7^{V} + m_6^{V} + m_5^{V} \\
x^{IV} &= m_8^{IV} + m_7^{IV} + m_6^{IV} + m_5^{IV} + m_4^{IV} \\
x^{III} &= m_8^{III} + m_7^{III} + m_6^{III} + m_5^{III} + m_4^{III} + m_3^{III} \\
x^{II} &= m_8^{II} + m_7^{II} + m_6^{II} + m_5^{II} + m_4^{II} + m_3^{II} + m_2^{II} \\
x^{I} &= m_8^{I} + m_7^{I} + m_6^{I} + m_5^{I} + m_4^{I} + m_3^{I} + m_2^{I} + m_1^{I} .
\end{aligned}$$

Во всѣхъ этихъ равенствахъ m_r^s имѣетъ то значеніе, что r звеньевъ должно брать по s; такъ что m_8^{VII} есть 8 элементовъ взятыхъ по 7, m_7^{VII} — 7 элементовъ взятыхъ по 7, и т. д. А такъ какъ r элементовъ взятыхъ по s доставляютъ

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.\ 2\ldots s} = q,$$

комбинацій, и притомъ же $28 = 4.7$, $56 = 7.8$, $70 = 2.5.7$, $21 = 3\ 7$, и т. д., такъ что производители q суть непремѣнно числа изъ ряда 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1: то, полагая,

$$m_8^{\mathrm{VII}} + m_8^{\mathrm{V}} + m_8^{\mathrm{III}} + m_8^{\mathrm{I}} = \alpha'$$

$$m_8^{\mathrm{VI}} + m_8^{\mathrm{V}} + m_8^{\mathrm{IV}} + m_8^{\mathrm{III}} + m_8^{\mathrm{II}} + m_7^{\mathrm{VI}} + m_7^{\mathrm{V}} + m_7^{\mathrm{IV}} + m_7^{\mathrm{III}} + m_7^{\mathrm{II}} + m_7^{\mathrm{I}} = \beta'$$

$$m_6^{\mathrm{V}} + m_6^{\mathrm{I}} + m_4^{\mathrm{II}} = \gamma'$$

$$m_8^{\mathrm{IV}} + m_7^{\mathrm{IV}} + m_7^{\mathrm{III}} + m_6^{\mathrm{IV}} + m_6^{\mathrm{III}} + m_5^{\mathrm{IV}} + m_5^{\mathrm{III}} + m_5^{\mathrm{II}} + m_5^{\mathrm{I}} = \delta'$$

$$m_8^{\mathrm{VI}} + m_8^{\mathrm{II}} + m_6^{\mathrm{III}} + m_6^{\mathrm{II}} + m_4^{\mathrm{III}} + m_4^{\mathrm{I}} = \varepsilon'$$

$$m_7^{\mathrm{V}} + m_7^{\mathrm{II}} + m_6^{\mathrm{IV}} + m_6^{\mathrm{II}} + m_3^{\mathrm{II}} + m_3^{\mathrm{I}} = \zeta'$$

$$m_8^{\mathrm{IV}} + m_5^{\mathrm{III}} + m_5^{\mathrm{II}} + m_2^{\mathrm{I}} = \eta'$$

$$x^{\mathrm{VIII}} + m_7^{\mathrm{VII}} + m_6^{\mathrm{VI}} + m_5^{\mathrm{V}} + m_4^{\mathrm{IV}} + m_3^{\mathrm{III}} + m_2^{\mathrm{II}} + m^{\mathrm{I}} = \vartheta',$$

вмѣсто C_1' получаемъ продуктъ вида (6), а именно

$$C_2' = 8^{\alpha'}.7^{\beta'}.6^{\gamma'}.5^{\delta'}.4^{\varepsilon'}.3^{\zeta'}.2^{\eta'}.1^{\vartheta'}.$$

Для какого нибудь частнаго рѣшенія показатели этого числа могутъ и несовпасть съ показателями произведенія C_r; но совершенно ясно, что ежели и то и другое число обниметъ *всѣ* рѣшенія одной и той же категоріи, напримѣръ всѣ смыкающіяся цѣпи, то оба итога должны будутъ совпасть, и одинъ другому будетъ служить провѣркой. Съ какою именно точностію можно опредѣлить C_2' въ каждомъ данномъ случаѣ— мы покажемъ на шашечницѣ $p = 8$.

14. *Общая построительная метода.*

И такъ, пусть $p = 8$, и обратимъ вниманіе на прилагаемый чертежъ 8. На немъ начерчены такіе 8 многоугольниковъ, въ которыхъ заключаются только 8 категорій (изъ 21) звеньевъ, и при томъ всѣ звенья взяты по 8; такъ что по уравн. (9) имѣемъ:

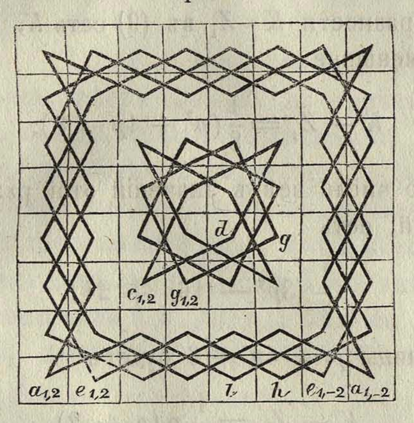
$$8x^{\mathrm{VIII}} = 64$$
$$x^{\mathrm{VIII}} = 8,$$

а по (8)

$$8(af + fl + lb + ek + kh + he + cd + gg) = 64.$$

Многоугольники, обнимающіе края шашечницы, заключаютъ въ себѣ по 12 сторонъ, а центральные — по 4 стороны. Да-

Черт. 8.



лѣе, замѣчаемъ, что эти многоугольники взятые по два находятся между собою въ *прямой симметріи*, а именно: въ цѣпи, которая начинается отъ $a_{1,2}$, имѣется $4af$, $4fl$, $4lb$ и въ симметричной ей, начинающейся отъ $a_{1,-2}$, заключаются $4af$, $4fl$ и $4lb$; въ многоугольникѣ, который начинается отъ $l_{1,2}$, имѣются $4ek$, $4kh$ и $4he$, и въ симметричномъ, который начинается съ $l_{1,-2}$, заключаются тѣ же звенья; и т. д. А такъ какъ симметричные многоугольники, которыхъ, какъ видно, 4 пары, не иначе могутъ быть соединены между собою, какъ чрезъ посредство новыхъ звеньевъ: то и заключаемъ, что, для совокупленія этихъ многоугольниковъ въ одну непрерывную цѣпь, необходимо построить по крайней мѣрѣ три новыя категоріи звеньевъ. По этому наибольшее значеніе Z_1 въ (9), въ случаѣ $p=8$, есть 10. И такимъ образомъ получаемъ тѣ 11 категорій рѣшеній, о которыхъ упомянуто въ нумерѣ 13; а именно:

$$Z_1 = 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Эту теорію весьма легко обобщить.

Въ случаѣ $p=4n+8$, многоугольниковъ будетъ всегда p; крайніе 4 будутъ состоять изъ $2(p-2)$ сторонъ; измѣнивъ

же p въ $p-4$ послѣдовательно $\frac{p}{4}$ раза, получимъ числа сторонъ въ центральныхъ многоугольникахъ. А потому наибольшее значенiе разности $K-Z_1$ въ (9) есть K, соотвѣтственно $Z_1=0$, а наименьшее

$$K-Z_1=\frac{1}{8}(p^2+4p-8);$$

вслѣдствiе чего число всѣхъ значенiй этой разности, то есть число категорiй, есть

$$\frac{1}{8}(3p^2-16p+24).$$

Для шашечницы $p=4n+6$ будетъ

$$K-Z_1=\frac{1}{8}p(p+2),$$

и число значенiй

$$\frac{1}{8}(3p^2-14p+16).$$

Наконецъ, для $p=2n+5$ наименьшее значенiе разности будетъ

$$K-Z_1=\frac{1}{8}(p^2+4p-5),$$

а число категорiй

$$\frac{1}{8}(3p^2-16p+21).$$

Эти-то многоугольники и могутъ служить руководствомъ для опредѣленiя *числа* дозволяемыхъ перемѣщенiй; самыя же перемѣщенiя опредѣлятся слѣдующей построительной методой.

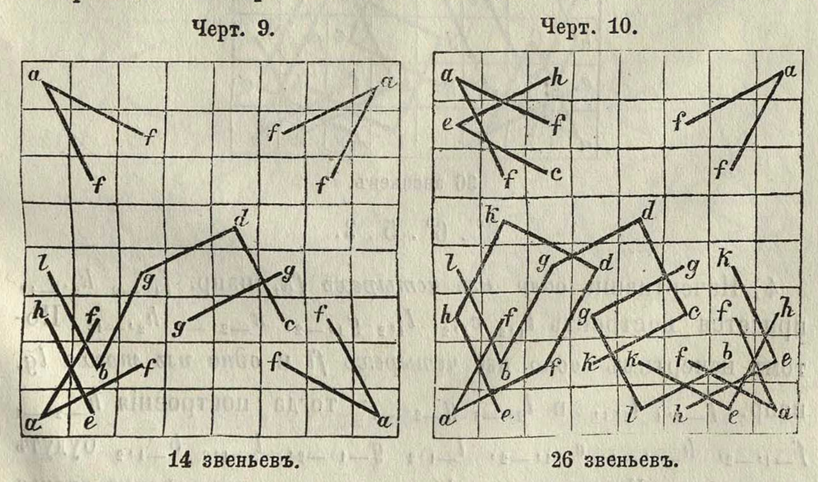
Пусть $p=8$, $Z_1=0$, и напишемъ себѣ для памяти всѣ $K=21$ категорiи звеньевъ: *af*, *eh*, *bl*, *fd*, *fg*, *fk*, *bg*, *kc*, *kg*, *ke*, *cd*, *gg*, *gd*, *kd*, *fl*, *lg*, *lc*, *hk*, *hg*, *hf*, *ec*.

1) Построивши 8*af*, начертимъ послѣдовательно по одному звену категорiй *eh*, *bl*, *bg*, *gd*, *gg*, *cd*, въ томъ порядкѣ въ какомъ онѣ написаны: выборъ *одного* изъ 8*eh*, *одного* изъ 8*bl*,

одного изъ $8bg$, *одного* изъ $8gd$, и *одного* изъ $8cd$, доставитъ всего 8^5 комбинацій, а такъ какъ остается еще построить gg, которое можно избрать только изъ $6gg$ (чер. 9), то и имѣемъ всего

$$8^5.6 \text{ комбинацій.}$$

2) Проведемъ теперь одно fd: по причинѣ существованія звеньевъ dg, dc (въ каждой точкѣ должно быть соединено по два звена, ни болѣе и ни менѣе), df можно избрать не изъ восьми, а изъ шести; при этомъ замѣчаемъ, что если построимъ fd въ треугольникѣ $y=1$, $x=2$, клѣтка $h_{2,1}$ останется съ однимъ выходомъ на $k_{-2,1}$, а потому вмѣстѣ съ $f_{1,2}$ $d_{1,2}$ необходимо построить и $h_{2,1}$ $k_{-2,1}$. Потомъ, построивши *одно изъ восьми* ck, напр. $c_{1,-2}$ $k_{1,2}$, необходимо придется начертить $e_{1,-2}$ $k_{1,-2}$, $e_{1,-2}$ $h_{2,-1}$, $e_{2,-1}$ $k_{2,-1}$, $e_{2,-1}$ $h_{1,-2}$ $l_{1,-2}$ $b_{1,2}$, $l_{1,-2}$ $g_{1,2}$. Наконецъ, построивши *одно изъ* $6dk$, напр. $d_{1,2}$ $k_{-2,1}$ придется начертить $e_{-2,1}$ c, $e_{-2,1}$ h. Совокупность этихъ построеній вмѣстѣ съ 14-ю уже начерченными звеньями изображена на чер. 10. *Одно изъ* $6fd$, *одно изъ* $8ck$, и *одно*



14 звеньевъ. 26 звеньевъ.

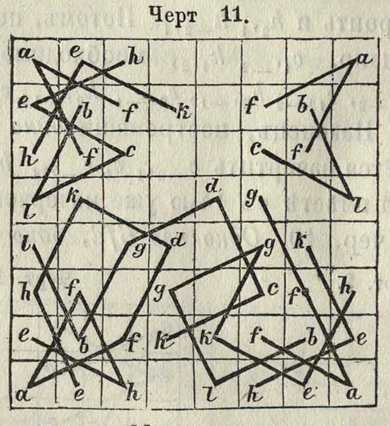
изъ $6dk$ доставляютъ $6^2.8$ комбинацій. А такъ какъ онѣ имѣютъ мѣсто при каждомъ изъ предыдущихъ $8^5.6$ построеній: то всего имѣемъ отъ 26 построенныхъ звеньевъ $8^6.6^3$ комбинацій. При этомъ замѣчаемъ, что всякое иное построеніе пер-

выхъ 14 звеньевъ и послѣднихъ 12-ти, увеличитъ, а не уменьшитъ число комбинацій, ибо мы съ намѣреніемъ избираемъ самыя невыгодныя для общаго итога комбинаціи.

3) Теперь начертимъ *одно изъ пяти* gk, напр. $g_{2,-1}\ k_{1,-2}$: тогда построенія $h_{1,2}\ f_{2,1}$, $h_{1,2}\ e_{2,1}$, $l_{-2,1}\ b_{-2,1}$, $l_{-2,1}\ c_{-2,1}$, $e_{-1,2}\ h_{-2,1}$, $e_{-1,2}\ k_{-1,2}$ будутъ вынуждены. Начертивъ же *одно изъ трехъ* fg, напр. $f_{2,-1}\ g_{-2,-1}$, должны будемъ построить $l_{-2,-1}\ b_{-2,-1}$, $l_{-2,-1}\ c_{-2,-1}$.

Построеніе этихъ 10-ти звеньевъ вмѣстѣ съ 26-ю прежними изображено на чер. 11. А число комбинацій есть

Черт 11.



36 звеньевъ.

$$8^6 . 6^3 . 5 . 3.$$

4) Начертивши *одно изъ четырехъ* fk, напр. $f_{1,-2}\ k_{2,-1}$, придется построить $l_{1,2}\ c_{1,2}$, $l_{1,2}\ g_{1,-2}$, $k_{-2,-1}\ h_{2,-1}$. Потомъ начертимъ *одно изъ четырехъ* fl и *одно изъ трехъ* lg, напр. $f_{-2,1}\ l_{2,1}$, и $l_{2,-1}\ g_{-2,-1}$: тогда построенія $h_{-2,-1}\ f_{-1,-2}$, $h_{-2,-1}\ e_{-1,-2}$, $l_{-1,2}\ g_{-1,-2}$, $l_{-1,2}\ b_{-1,2}$ будутъ вынуждены. Начертивъ же $l_{-1,-2}\ c_{-1,-2}$, опредѣлимъ звенья $e_{-1,-2}\ k_{-1,-2}$, $e_{-2,-1}\ k_{-2,-1}$, $e_{-2,-1}\ h_{-1,-2}$, $b_{-1,-2}\ g_{-1,-2}$. Построеніе этихъ 15 звеньевъ выполнено на чер. 12., и число комбинацій есть

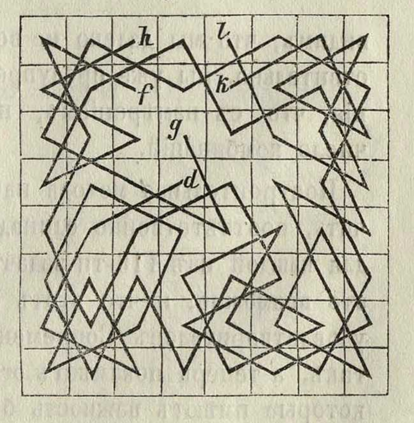
$$8^6 . 6^3 . 5 . 3 . 4^2 . 3.$$

5) Ежели построимъ *одно изъ четырехъ* звеньевъ hk, напр. $h_{1,-2}\ k_{1,2}$, то этимъ самымъ определятся звенья $e_{1,2}\ c_{1,2}$, $e_{2,1}\ k_{2,1}$, $d_{1,-2}\ g_{-2,1}$, $d_{1,-2}\ g_{-1,2}$. Построивши же *одно изъ двухъ* hg, напр. $h_{-2,1}\ g_{-2,1}$' определимъ построенія $k_{2,1}\ d_{-1,2}$, $g_{1,-2}\ b_{1,-2}$, $l_{2,-1}\ f_{-2,-1}$, $h_{-1,-2}\ k_{-1,2}$. За симъ, какъ показываетъ чер. 13, останется начертить *одно изъ двухъ* звеньевъ: $g_{-1,2}\ l_{-1,-2}$ или $g_{-1,2}\ h_{-1,2}$. Если проведемъ первое изъ нихъ, то построятся $h_{-1,2}\ k_{-1,-2}$ и $f_{-1,2}\ d_{-1,2}$; если же начертимъ последнее, то *вынужденными* будутъ звенья $l_{-1,-2}\ f_{-1,2}$ и $d_{-1,2}\ k_{-1,-2}$. Сверхъ того, такъ какъ звено $l_{-1,-2}\ c_{-1,-2}$ значащееся на чер. 12 было *произвольно*, а не вынужденно построено: то имеемъ

Черт. 12.

51 звено.

Черт. 13.



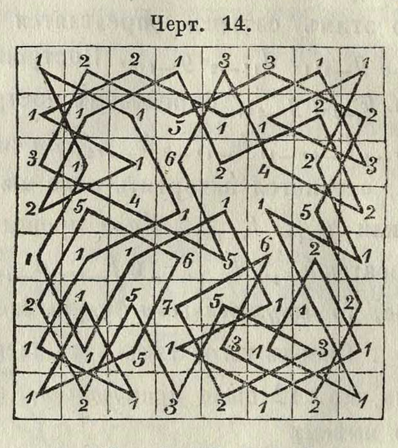
$$8^6 . 6^3 . 5 . 3 . 4^2 . 3\ 4 . 2^3 \text{ комбинацій.}$$

И такъ, закончимъ построеніе, какъ показано на чер. 14; после чего, начиная съ $a_{1,2}$, обойдемъ по порядку все клетки построенной цепи, вписывая, какъ прежде, число дозволяемыхъ перемещеній при каждомъ ходе. Если это сделаемъ, а потомъ возьмемъ произведеніе вписанныхъ чиселъ, то получимъ

$$1^{30} . 2^{13} . 3^7 . 4^2 . 5^7 . 6^3 . 7.$$

Сравнивая этотъ результатъ съ вышеполученнымъ, который мы напишемъ такъ:

Черт. 14.



$$2^{23}.\ 3^{2}.\ 4^{2}.\ 5.\ 6^{3},$$

видимъ, что мы далеко не всѣ построенія исчерпали. И дѣйствительно, мы уже предупредили при производствѣ построенія, что съ намѣреніемъ, на сколько возможно, уменьшали число комбинацій.

Построительная метода наша имѣетъ главною цѣлію получить, соотвѣтственно одинадцати значеніямъ Z_1, 11 рѣшеній для каждой изъ 116-ти задачъ. Мы показали на примѣрѣ, что это возможно, и что этотъ способъ, какъ и *первый*, вполнѣ удовлетворителенъ. Современемъ мы приложимъ теорію къ практикѣ, а теперь покамѣстъ ограничиваемся тѣми результатами, которые имѣютъ важность болѣе теоретическую, чѣмъ практическую.

15. Въ заключеніе предложимъ весьма любопытный примѣръ, относящійся къ провѣркѣ способа, посредствомъ коего (*первый* способъ) найдено число S_3.

Шашечница въ 25 клѣтокъ вполнѣ нами исчерпана, и мы знаемъ (Диф. и Разностн. уравн. Приложеніе III), что число всѣхъ обходовъ возможныхъ на этой шашечницѣ есть 848. Провѣримъ же нашъ *первый способъ* на этомъ случаѣ.

Во 1-хъ, пусть B_1 число звеньевъ af, B_2 число звеньевъ fb, и B_3, B_4, B_5, B_6 соотвѣтственныя числа звеньевъ fh, eb, eh и ec: тогда для уравн. (8),

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = 24,$$

Черт. 15.

$\binom{y=-1}{x=\ 2}$ $\binom{y=-1}{x=-2}$

$\binom{y=-2}{x=\ 1}$						$\binom{y=-2}{x=-1}$
	a	e	h	e	a	
	e	b	f	b	e	
	h	f	$c_{1,2}$	f	h	
$\binom{y=\ 2}{x=\ 1}$	e	$b_{1,2}$	$f_{1,2}$	b	e	$\binom{y=\ 2}{x=-1}$
	$a_{1,2}$	$e_{1,2}$	$h_{1,2}$	e	a	

$\binom{y=\ 1}{x=\ 2}$ $\binom{y=\ 1}{x=-2}$

найдемъ слѣдующія значенія:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1-я система:	$B_1=7$,	$B_2=1$,	$B_3=0$;	$B_4=7$,	$B_5=8$,	$B_6=1$,
2-я :	7,	0,	1,	8,	7,	1,
3-я :	7,	1,	0,	6,	8,	2,
4-я :	7,	0,	1,	8,	6,	2,
5-я :	7,	1,	0,	7,	7,	2,
6-я :	7,	0,	1,	7,	7,	2,
7-я :	6,	2,	0,	6,	8,	2,
8-я :	6,	0,	2,	8,	6,	2,
9-я :	6,	1,	1,	2,	7,	7.

Остальныя значенія удовлетворяющія (8) *построены* быть не могутъ, то есть не доставятъ непрерывной цѣпи изъ 24 звеньевъ.

Откуда видно, что $Z_1 = 0$ доставляетъ уравн. (9) одно рѣшеніе, а $Z_1 = 1$ четыре рѣшенія.

Во 2-хъ, первыя шесть системъ, будучи построены по вышеобъясненной методѣ, доставляютъ 512 цѣпей; 7-я и 8-я сист. доставляютъ 144 цѣпи; наконецъ послѣдняя 192 цѣпи.

И такъ, зная что число обходовъ отъ $a_{1,2}$ до четырехъ клѣтокъ, обозначенныхъ чрезъ h (чер. 15), до c, и четырехъ b, есть $\frac{512}{4} = 128 = 2^7$, обойдемъ эту шашечницу по методѣ Варнсдорфа, при чемъ въ каждую клѣтку впишемъ какъ число *дѣйствительно возможныхъ перемѣщеній,* такъ и то число, которое доставляетъ метода Варнсдорфа; опредѣливъ потомъ S_2 и S_1 (см. нум. 9, 10), возьмемъ отношеніе $\frac{S_2}{S_1}$: ежели получимъ 2^7, то тѣмъ самымъ подтвердимъ раціональность нашего способа.

На чер. 16 обходъ выполненъ; произведеніе верхнихъ чиселъ есть $S_2 = 2^{12}$, произведеніе нижнихъ $S_1 = 2^5$: а потому $\frac{S_2}{S_1} = 2^7$, какъ и быть должно.

Впрочемъ, если бы послѣдняя станція была заранѣе назначена, не для чего было бы брать отношеніе $\frac{S_2}{S_1}$; ибо произведеніе изъ чиселъ дозволяемыхъ перемѣщеній совпало бы съ дѣйствительнымъ числомъ обходовъ. Вотъ почему мы полагаемъ, что число $2^{21}. 3^{15}. 4^8. 5^3$ есть или истинное число смыкающихся цѣпей, или же весьма близкое къ истинному числу.

Черт. 16.

Вотъ краткая перечень важнѣйшихъ результатовъ нашихъ изысканій: 1° Мы не только привели вопросъ къ уравненіямъ (5), но также показали, какъ должно ими пользоваться для опредѣленія какъ числа обходовъ, такъ и самыхъ обходовъ; а главное мы опредѣлили *видъ интеграла* этихъ уравненій, когда движеніе коня подчиняется условію обойдти всѣ клѣтки данной шашечницы въ $p^2 - 1$ ходовъ (см. нум. 13). 2°. Въ нум. 10, 13 и 14 предложены математическіе способы опредѣлять легко и вѣрно число рѣшеній для какой угодно шашечницы.

Замѣчаніе къ 1-му тому Математическаго Сборника (стр. 286).

Предложенное мною рѣшеніе уравненія

$$y' + ay^2 + by + X = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

будетъ справедливо только подъ нѣкоторымъ условіемъ. А именно: получивши изъ (1), послѣдовательно,

$$y' + Py + X = 0,$$

$$ay + Q = 0, \quad P + Q = b,$$

$$\alpha' + \delta' + P(\alpha + \delta) + X = 0,$$

$$a\alpha + a\delta + Q = 0,$$

$$d(\quad + m) = (am - P) \left\{ \alpha + \frac{1}{am - P}(m' - \delta' - P\delta - X + am\delta + mQ) \right\} dx$$

$$\alpha + m = ce^{\int (am - P)dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$m' - \delta' - P\delta + am\delta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$am^2 - bm + X = 0,$$

внесемъ въ (2) и (3) каждое изъ двухъ значеній m: мы получимъ четыре уравненія съ тремя неизвѣстными функціями:

$$\alpha + m_1 = c_1 e^{\int (am_1 - P)\, dx}$$

$$\alpha + m_2 = c_2 e^{\int (am_2 - P)\, dx}$$

$$m'_1 - \delta' - P\delta + am_1\delta = 0$$

$$m'_2 - \delta' - P\delta + am_2\delta = 0.$$

Исключеніе этихъ функцій доставитъ соотношеніе между величинами извѣстными, которое будетъ выраженіемъ искомаго условія.

Кн. С. Урусовъ.

(Изъ 2-го тома Математическаго Сборника. Москва. 1867 г.)

Въ Университ. типографіи (Катковъ и К°), на Страстн. бульварѣ.

